C.6.1 Über Gitterwege

Beispiel 1: Wie viele kürzeste Gitterwege gibt es von $(0,0)$ nach (m,n), $m,n \geq 0$?

Einem solchen Weg entspricht eineindeutig eine Folge von $m+n$ Zeichen h (für „hoch") und r (für „rechts"), wobei genau m-mal r und n-mal h gewählt werden muss. Legt man in der Reihe die Plätze für die h's fest, so sind die der r's auch festgelegt (die übrigen nämlich). Für diese Wahl hat man genau $\binom{m+n}{n} = \binom{m+n}{m}$ Möglichkeiten.

Beispiel 2: Man zeige: Jeder geschlossene Streckenzug entlang der Gitterkanten hat gerade Länge!

Zum Beweis kann man sich Folgendes überlegen: Werden p Strecken nach oben durchlaufen, so müssen auch p Strecken nach unten durchlaufen werden. Werden q Strecken nach rechts durchlaufen, so werden auch q Strecken nach links durchlaufen. Die Länge des Weges ist also $l = 2(p+q)$, also eine gerade Zahl.