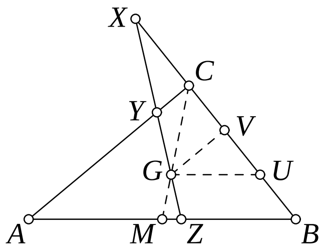
$\boxed{\text{D.12}}$ Eine Gerade durch den Schwerpunkt G eines Dreiecks schneide dessen (ggf. verlängerte) Seiten in den Punkten X, Y, Z. Man beweise, daß dann für die *gerichteten* Strecken GX, GY, GZ (s. dazu Abschnitt D.2) gilt:

$$\frac{1}{GX} + \frac{1}{GY} + \frac{1}{GZ} = 0.$$

D.12 *Beweis:* (Bild) Wir erinnern uns daran, daß G die Seitenhalbierende CM im Verhältnis $2:1$ teilt und dritteln daher die Seite BC durch die Punkte U, V so, daß $BU = UV = VC$ gilt. Dann ist wegen $CG : CM = CU : CB = 2 : 3$ nach der Umkehrung des ersten Strahlensatzes $GU \parallel AB$ und ebenso $GV \parallel AC$. Weiterhin gilt aufgrund des ersten Strahlensatzes mit $UV = VC = -UB$:



$$GX\left(\frac{1}{GX}+\frac{1}{GY}+\frac{1}{GZ}\right) = 1+\frac{VX}{VC}+\frac{UX}{UB}$$

$$= 1+\frac{VX-UX}{VC} = 1+\frac{VU}{UV} = 0,$$

also nach Division durch GX die behauptete Gleichung. $\square$