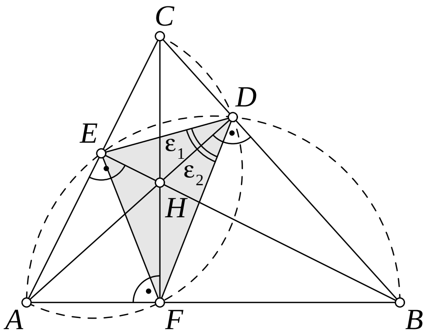
$\boxed{\text{D.21}}$ Die Höhen in einem spitzwinkligen Dreieck halbieren die Innenwinkel des Höhenfußpunktdreiecks. *Oder anders ausgedrückt:* Der Höhenschnittpunkt ist der Inkreismittelpunkt des Höhenfußpunktdreiecks.

D.21 *Beweis:* (Bild) Die Punkte D, E, F seien die Fußpunkte der Höhen im Dreieck ABC, das Dreieck DEF ist damit das Höhenfußpunktdreieck. Da die Winkel $\measuredangle AEB = \measuredangle ADB$ Rechte sind, liegen die Punkte D, E auf dem THALES-Kreis über dem Durchmesser AB, d. h., das Viereck $ABDE$ ist ein Sehnenviereck. Bezeichnen wir $\measuredangle ADE \equiv \varepsilon_1$ und $\measuredangle ADF \equiv \varepsilon_2$, so gilt, da sich gegenüberliegende Innenwinkel in einem Sehnenviereck zu 180° ergänzen (vgl. Aufgabe V.21):



$$\measuredangle EAB + \measuredangle EDB = \measuredangle EAB + \varepsilon_1 + 90° = 180°.$$

Ebenso ist $CAFD$ ein Sehnenviereck mit

$$\measuredangle CAF + \measuredangle CDF = \measuredangle CAF + \varepsilon_2 + 90° = 180°.$$

Wegen $\measuredangle EAB = \measuredangle CAF$ folgt aus beiden Gleichungen $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, d. h., die Höhe AD ist Winkelhalbierende im Höhenfußpunktdreieck DEF. Ebenso beweisen wir $\measuredangle BEF = \measuredangle BED$ und $\measuredangle CFD = \measuredangle CFE$. Mithin ist H als Schnittpunkt der drei Winkelhalbierenden im Dreieck DEF dessen Inkreismittelpunkt. □