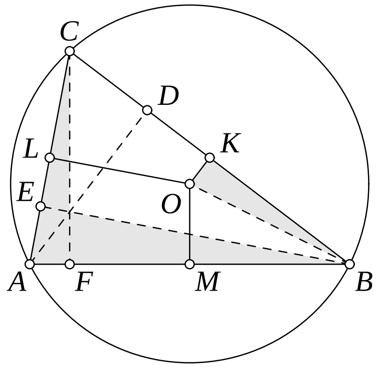
D.24 **Satz von Carnot.** In jedem Dreieck ist die Summe der Abstände des Umkreismittelpunktes zu den (Mittelpunkten der) Seiten gleich der Summe aus Umkreisradius R und Inkreisradius r.

D.24 *Beweis:* (Bild) Wir beschränken uns auf ein spitzwinkliges Dreieck ABC, in dem DEF das Höhenfußpunktdreieck und KLM das Seitenmittendreieck sei. Mit den Bezeichnungen $u \equiv OK$, $v \equiv OL$ und $w \equiv OM$ sowie der Zerlegung $\Delta = [ABC] = [AOB] + [BOC] + [COA]$ lassen sich folgende Beziehungen für den Flächeninhalt aufstellen (vgl. Aufgabe D.63):

$$2\,\Delta = r(a+b+c) = au + bv + cw. \tag{D.102}$$



Ferner ist leicht einzusehen, daß folgende rechtwinklige Dreiecke ähnlich sind:

$$\triangle BAE \sim \triangle CAF \sim \triangle BOK \sim \triangle COK,$$

da sie außer dem Rechten den Winkel $\alpha = \measuredangle BAE = \measuredangle CAF = \measuredangle BOK = \measuredangle COK$ gemeinsam haben (letzteres wegen $\measuredangle BOC = 2\alpha$ und $\triangle BOC$ gleichschenklig, vgl. Aufgabe K.4 oder D.27). Aus diesen Ähnlichkeiten lassen sich nun folgende Gleichungen gewinnen:

$$\frac{EA}{c} = \frac{AF}{b} = \frac{u}{R} = \frac{EA+AF}{b+c} \qquad \Longrightarrow \qquad u(b+c) = R(EA+AF).$$

Analog erhalten wir $v(c+a) = R(FB+BD)$ und $w(a+b) = R(DC+CE)$. Addieren wir die letzten drei Gleichungen, so folgt

$$(u+v+w)(a+b+c) - (au+bv+cw) = R(a+b+c),$$

und, wenn wir hier noch (D.102) einsetzen und durch $a+b+c>0$ dividieren, die Behauptung: $u+v+w = R+r$. $\square$

Bemerkung: Der Satz von CARNOT gilt in gleicher Weise auch für stumpfwinklige Dreiecke, wenn außerhalb des Dreiecks liegende Abstände u, v, w *negativ* gezählt werden.