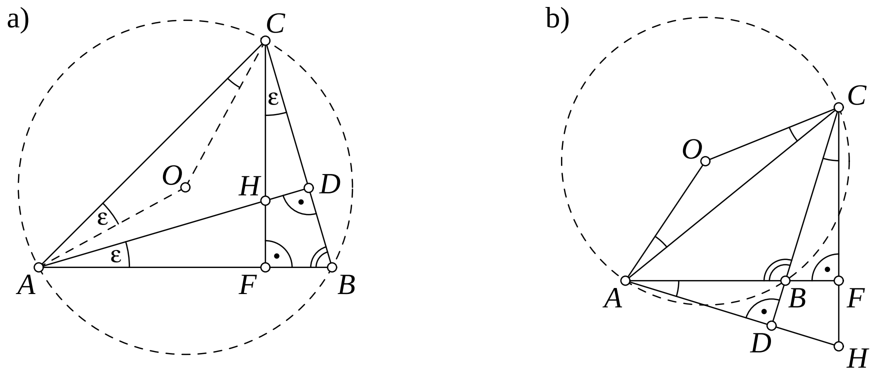
D.25 Im Dreieck ABC seien H der Höhenschnittpunkt und O der Mittelpunkt des Umkreises. Dann sind die Winkel $\measuredangle HAB$ und $\measuredangle OAC$ gleich groß.

D.25 *Beweis:* (Bild) Wir haben zwei Fälle zu unterscheiden; a) $\triangle ABC$ ist spitzwinklig und b) $\triangle ABC$ hat einen stumpfen Innenwinkel, so daß der Höhenschnittpunkt H bekanntlich außerhalb des Dreiecks liegt. Bezeichnen wir $\measuredangle HAB = \measuredangle DAB \equiv \varepsilon$, so können wir im ersten Fall wie folgt schließen (Bild a): $\triangle BDA$ ist rechtwinklig, also ist $\measuredangle ABD = \measuredangle ABC = 90^\circ - \varepsilon$. Letzterer ist Peripheriewinkel über der Sehne AC des Umkreises, somit ist der zugehörige Zentriwinkel doppelt so groß: $\measuredangle AOC = 2\measuredangle ABC = 180^\circ - 2\varepsilon$. Da $\triangle AOC$ gleichschenklig ist, sind die Basis-



winkel dieses Dreiecks nach dem Innenwinkelsatz $\measuredangle OAC = \measuredangle OCA = \frac{1}{2}[180^\circ - (180^\circ - 2\varepsilon)] = \varepsilon$. Im Falle eines stumpfwinkligen Dreiecks sei $\measuredangle HAB = \measuredangle DAB = \varepsilon$ (Bild b). Der Außenwinkel $\measuredangle ABC$ des rechtwinkligen Dreiecks BDA beträgt somit $90^\circ + \varepsilon$ und ist gleichzeitig Peripheriewinkel von AC, der nicht auf derselben Seite wie der Zentriwinkel $\measuredangle AOC$ liegt. Daher ist $\measuredangle AOC = 360^\circ - 2\measuredangle ABC = 180^\circ - 2\varepsilon$. Wie in a) ist $\triangle AOC$ gleichschenklig, damit gilt $\measuredangle OAC = \varepsilon = \measuredangle HAB$. $\square$