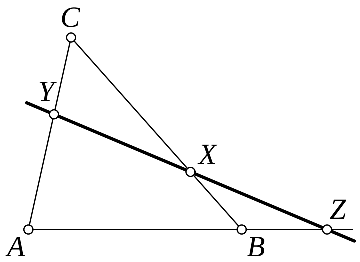
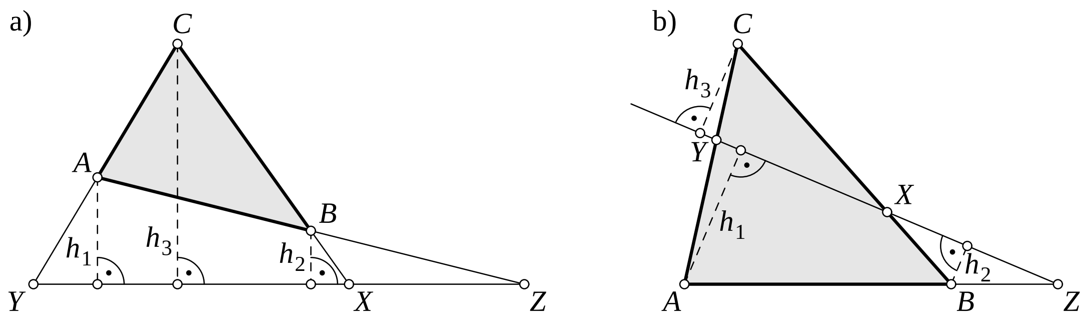
D.44 **Satz von Menelaus.** (Bild) Eine Gerade schneidet die (ggf. verlängerten) Seiten eines Dreiecks so, daß das Produkt der Teilverhältnisse, das ihre Schnittpunkte mit den drei Seiten bilden, den Wert -1 hat:



$$\frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} = -1. \tag{D.3}$$

D.44 *Beweis:* Wenn eine Gerade die Seiten eines Dreiecks (bzw. deren Verlängerungen) schneidet, so kann dieses nur geschehen, indem entweder *keine* Seite direkt geschnitten wird (Fall *1*, Bild a) oder *zwei* Seiten innere Schnittpunkte mit der Geraden haben (Fall *2*, Bild b). Anders ausgedrückt, müssen entweder alle drei Seiten oder nur eine Dreieckseite verlängert werden. In



beiden Fällen bezeichnen wir mit h_1, h_2, h_3 die Längen der Lote von den Eckpunkten A, B, C des Dreiecks auf die Gerade $g(Y,Z)$. Die Strahlensätze liefern uns nun unter Berücksichtigung des Vorzeichens (positives bei innerer, negatives bei äußerer Teilung) folgende Gleichungen

$$\text{Fall } \mathit{1}\colon \quad \frac{AZ}{ZB} = -\frac{h_1}{h_2}, \qquad \frac{BX}{XC} = -\frac{h_2}{h_3}, \qquad \frac{CY}{YA} = -\frac{h_3}{h_1},$$

$$\text{Fall } \mathit{2}\colon \quad \frac{AZ}{ZB} = -\frac{h_1}{h_2}, \qquad \frac{BX}{XC} = \frac{h_2}{h_3}, \qquad \frac{CY}{YA} = \frac{h_3}{h_1},$$

die jeweils miteinander multipliziert direkt die behauptete Gleichung ergeben:

$$\frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} = -\frac{h_1 \cdot h_2 \cdot h_3}{h_2 \cdot h_3 \cdot h_1} = -1. \quad \square$$