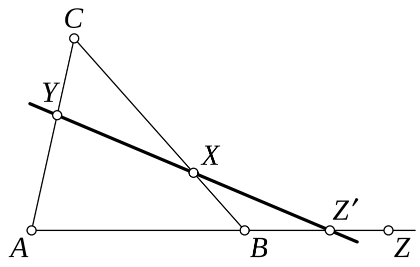
$\boxed{\text{D.45}}$ **Umkehrung des Satzes von Menelaus.** Wenn für drei Punkte $X$, $Y$, $Z$ auf den Seiten eines Dreiecks die Gleichung (D.3) gilt, dann sind $X$, $Y$, $Z$ kollinear.

D.45 *Beweis:* (Bild) $X$, $Y$ und $Z$ seien drei Punkte, jeder auf einer Seite des Dreiecks $ABC$, für die das Produkt der gegebenen Verhältnisse gleich $-1$ sei. Außerdem schneide $XY$ die Seite $AB$ in $Z'$. Zu zeigen ist also $Z' = Z$. Der Satz von MENELAUS fordert nun für den Punkt $Z'$




$$\frac{AZ'}{Z'B} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} = -1,$$

was jedoch

$$\frac{AZ'}{Z'B} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} = \frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \quad \text{bzw.} \quad \frac{AZ'}{Z'B} = \frac{AZ}{ZB}, \quad \frac{AZ' + Z'B}{Z'B} = \frac{AZ + ZB}{ZB}$$

bedeutet. Wegen $AB = AZ' + Z'B = AZ + ZB$ muß folglich $Z'B = ZB$ bzw. $Z' = Z$ sein, d. h., $X$, $Y$ und $Z = Z'$ sind in der Tat kollinear. $\square$