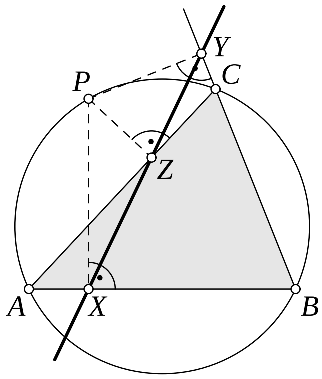
D.46 **Simson-Gerade.** Es sei P ein Punkt auf dem Umkreis des Dreiecks ABC und X, Y, Z die Fußpunkte der von P auf die Dreieckseiten bzw. deren Verlängerungen gefällten Lote. Man zeige, daß X, Y, Z auf einer gemeinsamen Geraden liegen.

D.46 *Beweis:* (Bild) Nach Voraussetzung sind PX, PY die Lote auf AB, BC (bzw. auf deren Verlängerungen), also gilt $\measuredangle BXP = \measuredangle BYP = 90°$, und $XBYP$ ist somit ein Sehnenviereck. Ebenso folgt aus $\measuredangle CZP = \measuredangle CYP = 90°$, daß $CYPZ$ ein Sehnenviereck ist. Schließlich ist auch $ABCP$ ein Sehnenviereck. Nun kann unter Verwendung des Peripheriewinkelsatzes folgende Gleichungskette aufgestellt werden:



$$\begin{aligned}
\measuredangle XYP &= \measuredangle XBP \quad \text{(Peripheriewinkel über } XP\text{)}\\
&= \measuredangle ABP \quad \text{(da } X \text{ auf } AB \text{ liegt)}\\
&= \measuredangle ACP \quad \text{(Peripheriewinkel über } AP\text{)}\\
&= \measuredangle ZCP \quad \text{(da } Z \text{ auf } AC \text{ liegt)}\\
&= \measuredangle ZYP \quad \text{(Peripheriewinkel über } ZP\text{)}.
\end{aligned}$$

Es ist also $\measuredangle XYP - \measuredangle ZYP = \measuredangle XYZ = 0$, was beweist, daß X, Y und Z auf der SIMSON-Geraden liegen. □