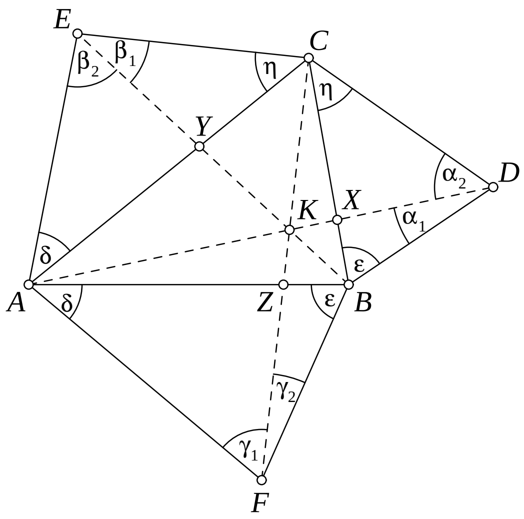
D.48 In einem Dreieck ABC werden in den Eckpunkten A, B und C jeweils gleich große Winkel δ, ε bzw. η nach außen abgetragen. Die freien Schenkel treffen sich in den Punkten D, E F, die in dieser Reihenfolge den Eckpunkten A, B, C gegenüberliegen. Man beweise, daß AD, BE und CF sich in einem Punkt schneiden.

D.48 *Beweis:* (Bild) Durch die beschriebene Konstruktion entstehen drei Aufsatzdreiecke BDC, CEA und AFB, die durch die Geraden AD, BE bzw. CF in insgesamt sechs kleinere Dreiecke zerlegt werden. Führen wir noch die im Bild bezeichneten Winkel α_1, α_2, β_1, β_2, γ_1, γ_2 ein, können wir mit Hilfe des Sinussatzes die benötigten Abschnitte auf den Dreieckseiten berechnen:



$$AZ = FZ\,\frac{\sin\gamma_1}{\sin\delta}, \qquad ZB = FZ\,\frac{\sin\gamma_2}{\sin\varepsilon},$$
$$BX = DX\,\frac{\sin\alpha_1}{\sin\varepsilon}, \qquad XC = DX\,\frac{\sin\alpha_2}{\sin\eta},$$
$$CY = EY\,\frac{\sin\beta_1}{\sin\eta}, \qquad YA = EY\,\frac{\sin\beta_2}{\sin\delta}.$$

Unser Zielausdruck (D.2) nimmt damit zunächst folgende Form an:

$$\frac{AZ}{ZB}\cdot\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA} = \frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2}\cdot\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}\cdot\frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2}. \tag{D.104}$$

Die Hilfswinkel $\alpha_1, \ldots, \gamma_2$ werden wir wieder los, indem wir die Dreiecke ABD, CAD, BCE, ABE, CAF, BCF heranziehen: Diese haben paarweise die Winkel $\beta+\varepsilon$, $\gamma+\eta$ und $\alpha+\delta$ sowie die Seiten AD, BE, CF gemeinsam. Der Sinussatz liefert hier:

$$\sin\alpha_1 = \sin(\beta+\varepsilon)\,\frac{c}{AD}, \qquad \sin\alpha_2 = \sin(\gamma+\eta)\,\frac{c}{AD},$$
$$\sin\beta_1 = \sin(\gamma+\eta)\,\frac{a}{BE}, \qquad \sin\beta_2 = \sin(\alpha+\delta)\,\frac{a}{BE},$$
$$\sin\gamma_1 = \sin(\alpha+\delta)\,\frac{b}{CF}, \qquad \sin\gamma_2 = \sin(\beta+\varepsilon)\,\frac{b}{CF}.$$

Setzen wir diese Gleichungen in (D.104) ein, kürzt sich auf wundersame Weise alles heraus, so daß tatsächlich 1 übrig bleibt und damit nach der Umkehrung des Satzes von CEVA die Behauptung bewiesen ist. □