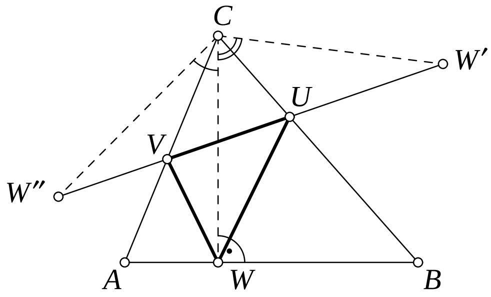
$\boxed{\text{D.56}}$ **Problem von Fagnano.** Schreibe einem spitzwinkligen Dreieck ABC ein Dreieck UVW von möglichst kleinem Umfang ein.

D.56 (Bild) Wir betrachten zunächst ein beliebiges einbeschriebenes Dreieck UVW mit U auf BC, V auf CA und W auf AB. Seien W' und W'' die Spiegelbilder von W an BC bzw. CA. Dann gilt

$$WU + UV + VW = W'U + UV + VW''.$$



Dies ist im allgemeinen ein gebrochener Weg von W' nach W'' mit Winkeln ungleich $180°$ bei U und V. Ein solcher Weg ist dann so kurz wie möglich, wenn er *geradlinig* wie im Bild ist. Unter allen einbeschriebenen Dreiecken mit fester Ecke W auf AB besitzt daher jenes den kleinsten Umfang, für welches U und V auf der Geraden $W'W''$ liegen. Es ist also W auf AB so zu wählen, daß der Umfang $W'W''$ minimal wird. Da CW' und CW'' Bilder von CW bei Spiegelung an BC bzw. CA sind, sind diese Strecken gleich und somit ist

$$\measuredangle W'CW'' = 2\measuredangle BCA.$$

Somit ist im gleichschenkligen Dreieck $CW'W''$ der Winkel bei C unabhängig von der Wahl von W. Die Basis ist am kürzesten, wenn die Schenkel möglichst klein sind, d. h., wenn CW minimal ist. CW muß daher die von C auf AB gefällte Höhe sein. Dies führt zu dem Ergebnis:

Das einem spitzwinkligen Dreieck ABC einbeschriebene Dreieck kleinsten Umfangs ist das Höhenfußpunktdreieck.