D.58 Welcher Punkt im Innern eines Dreiecks ABC minimiert die Summe der Quadrate der Abstände zu den Seiten?

D.58 Wir lassen zunächst einmal jedwede Geometrie außer acht und nehmen die CAUCHY-SCHWARZsche Ungleichung (vgl. Aufgabe U.23) mit den beiden Tripeln (a, b, c) und (u, v, w). Gleichung (U.38) lautet dann

$$(a^2 + b^2 + c^2)(u^2 + v^2 + w^2) \geq (au + bv + cw)^2.$$

Der rechts stehende Ausdruck ist aber gerade das Quadrat des doppelten Flächeninhalts des Dreiecks, so daß daraus

$$u^2 + v^2 + w^2 \geq \frac{4\Delta^2}{a^2 + b^2 + c^2} \tag{D.106}$$

folgt. Nun sagt uns entweder eine geometrische Interpretation des rechts stehenden Ausdrucks in (D.106) oder (U.38), wann Gleichheit vorliegt: Beide Tripel (a, b, c) und (u, v, w) müssen proportional sein, d. h.

$$\frac{u}{a} = \frac{v}{b} = \frac{w}{c} = \lambda \in \mathbb{R}.$$

Diese Bedingung ist identisch mit derjenigen aus Aufgabe D.92; es handelt sich demnach bei dem gesuchten Punkt um den LÉMOINE-Punkt des Dreiecks ABC (der der isogonal konjugierte Punkt zum Schwerpunkt ist).

Bemerkung: Aus (D.106) erhalten wir unter Beachtung von Aufgabe D.73 mit dem BROCARD-Winkel ω:

$$u^2 + v^2 + w^2 \geq \frac{\Delta}{\cot\omega}.$$