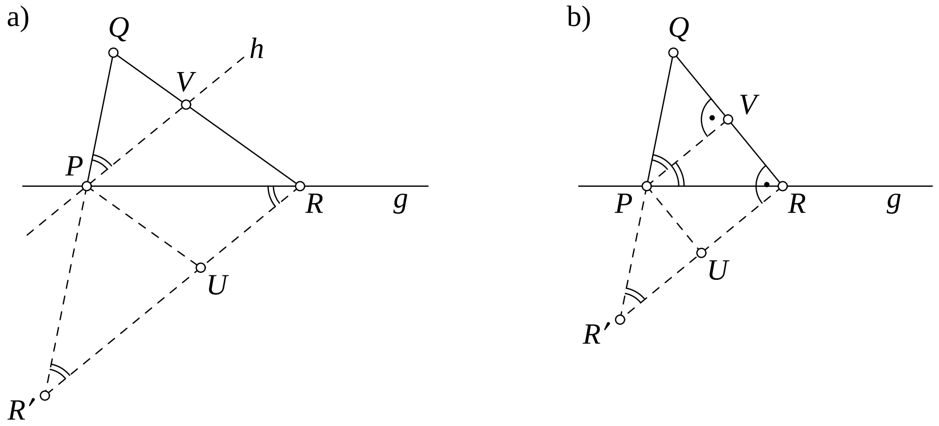
D.59 Gegeben sei eine Gerade g mit einem Punkt $P \in g$ sowie einem Punkt $Q \notin g$. Für welchen Punkt $R \in g$ wird der Ausdruck $(QP + PR)/QR$ maximal?

D.59 Wenn es darum geht, Summen von Streckenlängen zu vergleichen, die nicht auf einer Geraden liegen (hier $QP + PR$), ist es immer eine gute Idee, diese auf eine Gerade zu bringen. Wir erreichen dies hier, indem wir anstelle von $R \in g$ denjenigen Punkt R' auf der Verlängerung von QP betrachten, für den $PR' = PR$ gilt (Bild a). In dem so entstehenden $\triangle RR'Q$ ziehen wir noch die Parallelen zu RQ und RR' jeweils durch P, so daß $PURV$ ein Parallelogramm wird.



Nach dem ersten Strahlensatz finden wir somit

$$\frac{QP + PR}{QR} = \frac{QR'}{QR} = \frac{QP}{QV} \implies \text{Max.}$$

Wegen $QP = \text{const}$ lautet die Forderung $QV \Rightarrow$ Min. Das Dreieck $R'PR$ ist aber für jede beliebige Lage von R gleichschenklig mit gleichen Basiswinkeln, weshalb die Gerade $h(P, V)$ als Parallele zu $R'R$ ebenfalls unabhängig von R ist. Unsere obige Minimalforderung wird also genau dann erfüllt, wenn V der Lotfußpunkt von Q auf h ist (Bild b). Aus $\measuredangle PR'R = \measuredangle R'RP = \measuredangle RPV = \measuredangle QPV$ folgt: $\triangle PVQ \cong \triangle PVR$; also ist $\triangle QPR$ gleichschenklig mit $PR = PQ$.