$\boxed{\text{D.66}}$ **Herons Formel.** Der Flächeninhalt eines Dreiecks ist gleich

$$\varDelta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}. \tag{D.9}$$

D.66 *Beweis:* Um die Richtigkeit dieser Formel zu zeigen, benötigen wir nur ein wenig Trigonometrie. Nach dem Kosinussatz ist

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

und damit

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \frac{\sqrt{-a^4 - b^4 - c^4 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 + 2a^2b^2}}{2bc}.$$

Diesen Ausdruck setzen wir in $\Delta = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$ ein:

$$\begin{aligned}\Delta &= \frac{1}{4}\sqrt{-a^4 - b^4 - c^4 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 + 2a^2b^2} \\ &= \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}. \quad \square\end{aligned}$$