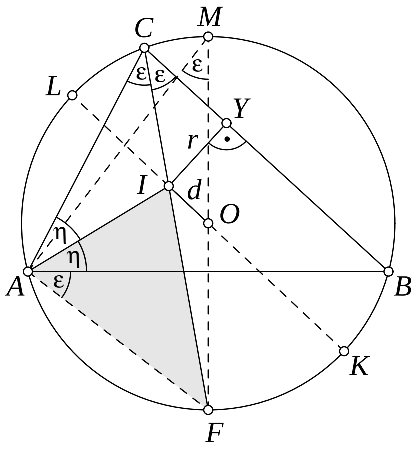
D.74 **Eulers Abstand *OI*.** Für den Abstand $d \equiv OI$ zwischen den Mittelpunkten von Um- und Inkreis eines Dreiecks gilt:

$$OI^2 = d^2 = R^2 - 2rR \qquad \text{oder} \qquad \frac{1}{R+d} + \frac{1}{R-d} = \frac{1}{r}. \tag{D.14}$$

D.74 *Beweis:* (Bild) Aus Aufgabe D.3 wissen wir, daß die verlängerte Winkelhalbierende von $\measuredangle ACB$, auf der I liegt, die Mittelsenkrechte von AB, auf der O liegt, gerade im Punkt F auf dem Umkreis schneidet. FM sei der Durchmesser des Umkreises senkrecht zu AB. Schreiben wir zur Abkürzung $\varepsilon = \frac{1}{2}\measuredangle ACB$ und $\eta = \frac{1}{2}\measuredangle CAB$, so ist aus dem Bild leicht $\measuredangle AMF = \measuredangle ACF = \varepsilon$ und $\measuredangle FAB = \measuredangle FCB = \varepsilon$ abzulesen. Der Außenwinkel im Dreieck CAI bei I beträgt $\measuredangle AIF = \varepsilon + \eta = \measuredangle FAI$, $\triangle FAI$ ist demzufolge gleichschenklig: $FA = FI$. Nun können wir den Sehnensatz aus Aufgabe K.11 vorteilhaft auf die Sehnen FC und KL mit ihrem Teilungspunkt I anwenden:



$$
\begin{aligned}
R^2 - d^2 &= KI \cdot IL \\
&= FI \cdot IC = FA \cdot IC \\
&= FM \, \frac{FA/FM}{IY/IC} \, IY \\
&= FM \, \frac{\sin\varepsilon}{\sin\varepsilon} \, IY = FM \cdot IY = 2Rr.
\end{aligned}
$$

Damit wird $d^2 = R^2 - 2rR$. $\square$

Bemerkung: Aus $d^2 \geq 0$ folgt hieraus sofort die Ungleichung von Chapple-Euler: $R \geq 2r$ (vgl. Aufgabe G.31).