D.84 Wann gilt in der Ungleichung von ERDÖS-MORDELL (D.16) das Gleichheitszeichen?

D.84 In der Lösung der vorherigen Aufgabe D.83 betraf die erste Abschätzung die Ungleichungen $EF \geq D_1D_2$, $FD \geq E_1E_2$ bzw. $DE \geq F_1F_2$. Diese werden zu Gleichungen, wenn die dort genannten Trapeze zu Rechtecken werden. Dies ist genau dann der Fall, wenn P der Umkreismittelpunkt von $\triangle ABC$ ist (DEF ist dann das *Seitenmittendreieck* und $EF \parallel D_1D_2$ folgt aus der Umkehrung des zweiten Strahlensatzes). Gleichzeitig müssen bei der zweiten Abschätzung die Summanden in den Klammerausdrücken gleich sein. Da aber schon $PA = PB = PC$ ist, muß somit auch $DE = EF = FD$ gelten, d. h. das Lotfußpunktdreieck gleichseitig sein. Beide Forderungen erfüllt nur der Symmetriepunkt P (d. h. der Schwerpunkt, Umkreismittelpunkt usw.) in einem *gleichseitigen* Dreieck ABC.