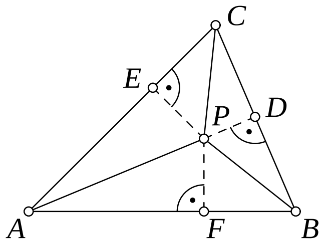
D.92 (Bild) Für welchen Punkt P im Innern eines Dreiecks ABC gilt die Gleichung

$$\frac{PD}{BC} = \frac{PE}{CA} = \frac{PF}{AB},$$

wobei D, E, F die Fußpunkte der Lote von P auf die Seiten BC, CA, AB sind?



D.92 (Bild) Ein Punkt P' auf der Ecktransversalen CK erfülle zunächst die Bedingung

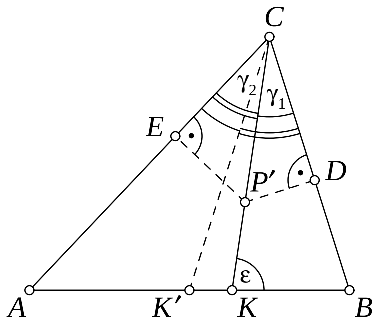
$$\frac{P'D}{BC} = \frac{P'E}{CA} \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{P'D}{P'E} = \frac{BC}{CA} = \frac{a}{b}. \tag{D.110}$$

Mit Hilfe des Sinussatzes finden wir mit den im Bild bezeichneten Winkeln $\gamma_1 \equiv \measuredangle BCK$, $\gamma_2 \equiv \measuredangle ACK$ und $\varepsilon \equiv \measuredangle BKC$

$$P'D = CP' \sin\gamma_1, \;\; P'E = CP' \sin\gamma_2, \;\; BC = KB\,\frac{\sin\varepsilon}{\sin\gamma_1}, \;\; CA = AK\,\frac{\sin(\pi-\varepsilon)}{\sin\gamma_2}.$$

Dann wird aus (D.110) mit $\sin\varepsilon = \sin(\pi-\varepsilon)$:

$$\frac{P'D}{P'E} = \frac{KB}{AK}\cdot\frac{\sin\gamma_2}{\sin\gamma_1} = \frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2} = \frac{a}{b}. \tag{D.111}$$



Nun sei CK' die isogonale Gerade zu CK. Mithin ist $\measuredangle ACK' = \gamma_1$, $\measuredangle BCK' = \gamma_2$, und der Sinussatz liefert uns hier

$$\frac{K'B}{AK'}\cdot\frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2} = \frac{a}{b}. \tag{D.112}$$

(D.111) und (D.112) können nur für $AK' = K'B$ erfüllt werden, d. h., CK' ist eine Seitenhalbierende und CK demzufolge die zugehörige Symmediane. P' liegt also auf der Symmediane zwischen den Seiten CB und CA. Für die anderen Seitenpaare erhalten wir analoge Ergebnisse, so daß unser gesuchter Punkt P der Lémoine-Punkt des Dreiecks ABC ist (vgl. Aufgabe D.41).
Bemerkung: Daß der gesuchte Punkt irgendwie mit dem Schwerpunkt verwandt ist, ließe sich auch dadurch vermuten, daß für diesen gerade die *Produkte* $PD \cdot BC = PE \cdot CA = PF \cdot AB$ untereinander gleich sind (vgl. Aufgabe D.22).