$\boxed{\mathsf{G.1}}$ Es gelten folgende Relationen in den elementaren symmetrischen Funktionen der Seitenlängen a, b, c bzw. Tangentenabschnitte x, y, z:

$$\sigma_1 \equiv a + b + c = 2s, \tag{G.5}$$

$$\sigma_2 \equiv bc + ca + ab = s^2 + 4Rr + r^2, \tag{G.6}$$

$$\sigma_3 \equiv abc = 4Rrs, \tag{G.7}$$

$$\tau_1 \equiv x + y + z = s, \tag{G.8}$$

$$\tau_2 \equiv yz + zx + xy = r(4R + r), \tag{G.9}$$

$$\tau_3 \equiv xyz = r^2 s. \tag{G.10}$$

G.1 *Beweis:* Folgende Beziehungen lassen sich mit einfachen Betrachtungen herleiten:

$$a = 2\,R\sin\alpha = 4\,R\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}, \qquad \text{(erweiterter Sinussatz (D.1), Aufgabe D.5)}$$

$$s - a = r\cot\frac{\alpha}{2} \qquad \text{(s. Lösung zur Aufgabe D.63).}$$

Nach Division und Multiplikation beider Gleichungen folgt daraus

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{ar}{4R(s-a)}, \qquad \cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{a(s-a)}{4Rr}.$$

Der „trigonometrische Pythagoras“ $\sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2} = 1$ führt nun auf die kubische Gleichung

$$a^3 - 2sa^2 + (s^2 + 4Rr + r^2)a - 4Rrs = 0; \tag{G.101}$$

völlig analoge Gleichungen ergeben sich für b und c. Das bedeutet, daß a, b und c Wurzeln dieser kubischen Gleichung sind. Mit Hilfe des VIETAschen Wurzelsatzes lesen wir daraus unmittelbar die behaupteten Relationen (G.5) ab.

Um die Gleichungen (G.6) abzuleiten, setzen wir einfach $a = y + z = s - x$ in (G.101) ein. Es folgt die kubische Gleichung

$$x^3 - sx^2 + r(4R + r)x - r^2 s = 0$$

(sowie analoge in y, z), aus denen mit Hilfe des VIETAschen Wurzelsatzes (G.6) folgt. □