$\boxed{\text{G.12}}$ Man beweise

$$\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a}+\sqrt{c+a-b} \leq \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} \tag{G.12}$$

und bestimme, wann Gleichheit auftritt.
(*APMO, 1996*)

G.12 *Beweis:* Die Substitution (G.4) führt hier auf

$$\sqrt{2}\,(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}) \leq \sqrt{x+y}+\sqrt{y+z}+\sqrt{z+x}. \tag{G.102}$$

Nach der Methode „Teile und (be)herrsche" (s. Abschnitt U.3.1) finden wir weiter:

$$\begin{aligned} 0 &\leq (\sqrt{x}-\sqrt{y})^2, \\ 2\sqrt{xy} &\leq x+y, \\ x+2\sqrt{xy}+y = (\sqrt{x}+\sqrt{y})^2 &\leq 2(x+y), \\ \sqrt{x}+\sqrt{y} &\leq \sqrt{2}\,\sqrt{x+y}. \end{aligned} \tag{G.103}$$

Zyklische Vertauschung und Addition ergibt (G.102). Wegen (G.103) und der entsprechenden anderen Gleichungen gilt Gleichheit nur für $x = y = z$, d. h. für alle *gleichseitigen* Dreiecke. □