$\boxed{\textsf{G.13}}$ Angenommen, a, b, c seien die Seitenlängen eines Dreiecks. Zeige, daß gilt:

$$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c) \le 3abc. \tag{G.13}$$

(*6. IMO, UdSSR, Moskau, 1964*)

G.13 *Beweis:* Die Einschränkung, daß a, b und c die Seiten eines Dreiecks sind (und damit die Dreiecksungleichungen erfüllen müssen) ist unnötig, denn wir können zeigen, daß die Behauptung für *alle* positiven reellen Zahlen a, b, c gilt: Nach der SCHURschen Ungleichung (U.40) (s. Aufgabe U.25) ist nämlich für $\lambda = 1$

$$
\begin{aligned}
& a(a-b)(a-c)+b(b-c)(b-a)+c(c-a)(c-b) \geq 0, \\
\Longrightarrow\quad & 3abc-(a^2b+a^2c-a^3)-(b^2c+b^2a-b^3)-(c^2a+c^2b-c^3) \geq 0, \\
\Longrightarrow\quad & 3abc \geq a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c). \quad \square
\end{aligned}
$$