$\boxed{\textsf{G.14}}$ Es seien a, b, c die Seitenlängen eines Dreiecks. Beweise

$$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\geq 0 \tag{G.14}$$

und bestimme, in welchem Fall Gleichheit auftritt.
(*24. IMO, Frankreich, Paris, 1983*)

G.14 *Beweis:* Mit unserer Substitution $a \equiv y + z$, $b \equiv z + x$, $c \equiv x + y$ überführen wir die behauptete Ungleichung in

$$(y+z)^2(z+x)(y-x) + (z+x)^2(x+y)(z-y) + (x+y)^2(y+z)(x-z) \geq 0,$$

welche nach auswucherndem Ausmultiplizieren glücklicherweise durch gegenseitige Auslöschung der meisten Terme in

$$xy^3 + yz^3 + zx^3 \geq x^2yz + xy^2z + xyz^2 = xyz(x+y+z) \tag{G.104}$$

übergeht. Dieses Resultat ist ein guter Kandidat für die CAUCHY-SCHWARZsche Ungleichung, und zwar vom Typ d) mit $\mathcal{S}_2 = \mathcal{S}_3$ bzw. $\boldsymbol{v}^2 = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$ (s. Abschnitt U.2.2). Da sie durch zyklische Vertauschung der Variablen unverändert bleibt, genügt es, allein den ersten Term auf der linken Seite zu betrachten:

$$u_1^2 = xy^3. \tag{G.105}$$

Für $u_1 v_1$ haben wir nun auf der rechten Seite drei Möglichkeiten:

$$u_1 v_1 = \begin{cases} x^2yz \\ xy^2z, \\ xyz^2 \end{cases} \quad \text{denen mit (G.104)} \quad v_1^2 = \begin{cases} x^3y^{-1}z^2 \\ xyz^2 \\ xy^{-1}z^4 \end{cases}$$

entspricht. Wir erkennen Übereinstimmung (links unten und rechts Mitte, d. h. es ist somit $\boldsymbol{u} = (\sqrt{xy^3}, \sqrt{yz^3}, \sqrt{zx^3})$, $\boldsymbol{v} = (z\sqrt{xy}, x\sqrt{yz}, y\sqrt{zx})$) und sind damit schon fertig. $\square$