$\boxed{\textsf{G.22}}$ Für alle *spitzwinkligen* Dreiecke gilt:

$$\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma = \tan\alpha \tan\beta \tan\gamma \geq 3\sqrt{3}. \quad \triangle \tag{G.23}$$

G.22 *Beweis:* Die Gleichung zeigen wir mit dem Additionstheorem:

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = \tan(\pi-\gamma) = -\tan\gamma,$$

und die Ungleichung mit der AM-GM-Ungleichung (alle Tangens sind positiv):

$$\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma = \tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma \geq 3\sqrt[3]{\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma},$$
$$(\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma)^{\frac{2}{3}} \geq 3 \qquad \Longrightarrow \qquad \tan\alpha\tan\beta\tan\gamma \geq 3\sqrt{3}. \quad \square$$