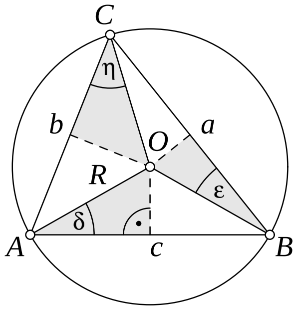
$\boxed{\mathsf{G.31}}$ In allen Dreiecken gilt:

$$3\sqrt{3}R \geq 2\,s \geq 6\sqrt{3}r. \quad \triangle \tag{G.31}$$

Insbesondere folgt daraus aufgrund der Trichotomie die bekannte **Ungleichung von Chapple-Euler.**

$$R \geq 2\,r. \quad \triangle \tag{G.32}$$

**G.31** *Beweis:* (Bild) In den gleichschenkligen Dreiecken $AOB$, $BOC$, $COA$ gilt mit den Winkeln $\measuredangle OAB \equiv \delta$, $\measuredangle OBC \equiv \varepsilon$, $\measuredangle OCA \equiv \eta$, von denen jeder offensichtlich kleiner als ein Rechter ist:




$$\cos\delta = \frac{c}{2R}, \quad \cos\varepsilon = \frac{a}{2R}, \quad \cos\eta = \frac{b}{2R},$$

also $a+b+c = 2s = 2R(\cos\delta+\cos\varepsilon+\cos\eta)$. Die Kosinus-Funktion ist in $[0, \frac{\pi}{2}]$ steng konkav, woraus mittels der JENSENschen Ungleichung (vgl. Aufgabe **U.26**)

$$\frac{1}{3}(\cos\delta + \cos\varepsilon + \cos\eta) \leq \cos\left(\frac{\delta+\varepsilon+\eta}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

folgt. Beides zusammen ergibt die linke Seite der Ungleichung $a+b+c = 2s \leq 3\sqrt{3}R$. Für die rechte Seite setzen wir in $\tau_1^3 \geq 27\tau_3$ (U.64) die Ausdrücke $\tau_1 = s$ und $\tau_3 = r^2 s$ ein. □

Alternativer *Beweis* für die Ungleichung von CHAPPLE-EULER: Nach Aufgabe **D.74** gilt stets $d^2 = R^2 - 2rR$, wobei $d \equiv OI$ der Abstand zwischen Umkreis- und Inkreismittelpunkt ist. Selbstverständlich ist $d^2 \geq 0$, woraus aus obiger Gleichung nach Umstellen und Division durch $R > 0$ die Behauptung folgt. □