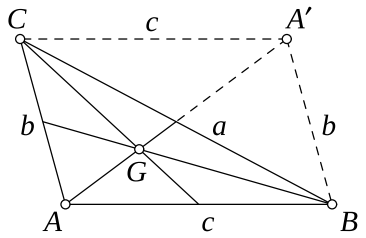
G.61

$$\frac{3}{2}s < m_a + m_b + m_c < 2s. \ \triangle \tag{G.61}$$

G.61 *Beweis:* (Bild) Wir wenden die Dreiecksungleichungen auf die Teildreiecke ABG, BCG und CAG an, und berücksichtigen dabei, daß der Schwerpunkt G jede Seitenhalbierende drittelt:

$$\frac{2}{3}(m_a + m_b) > c, \quad \frac{2}{3}(m_b + m_c) > a, \quad \frac{2}{3}(m_c + m_a) > b.$$



Addition der Ungleichungen liefert die Abschätzung nach unten: $\frac{3}{2}s < m$. Für die Abschätzung nach oben ergänzen wir das Dreieck zu einem Parallelogramm $ABA'C$ mit den Diagonalen a und $2m_a$. Die Dreiecksungleichung für das Teildreieck $AA'C$ lautet dann: $b + c > 2m_a$. Analog erhalten wir mit anderen Ergänzungen die Ungleichungen $c + a > 2m_b$ und $a + b > 2m_c$, deren Addition $4s > 2m$ bzw. $m < 2s$ ergibt. □

Bemerkung: Die Anwendung von Dreiecksungleichungen auf alle anderen möglichen Teildreiecke liefert lediglich die schwächere Abschätzung $s < m < 3s$.