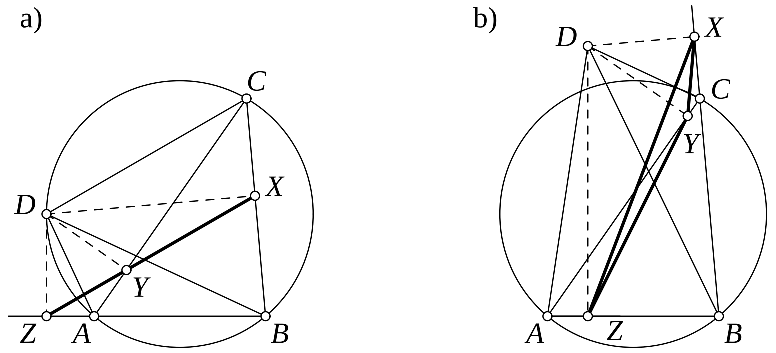
$\boxed{\text{G.83}}$ **Ptolemäus' Ungleichung.** In jedem konvexen Viereck $ABCD$ gilt:

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD \geq AC \cdot BD, \tag{G.81}$$

mit Gleichheit genau bei einem Sehnenviereck.

G.83 *Beweis:* Wir hatten in Aufgabe D.45 gesehen, daß das Lotfußpunktdreieck eines Punktes D auf dem Umkreis von $\triangle ABC$ gerade zur SIMSON-Geraden XYZ entartet (Bild a). Für alle



anderen Punkte D haben wir tatsächlich ein Dreieck XYZ vorzuliegen (Bild b), für welches die Seitenlängen nach Aufgabe V.26 die Dreiecksungleichung erfüllen:

$$XY + YZ > XZ, \quad \text{oder} \quad \frac{AB \cdot CD}{2R} + \frac{BC \cdot AD}{2R} > \frac{AC \cdot BD}{2R}.$$

Beide Fälle zusammen genommen ergeben nach Multiplikation mit $2R$ die behauptete Ungleichung. $\square$