G.1 Ungleichungen im Dreieck

Dieser Abschnitt enthält einige Ungleichungen aus der unüberschaubaren Menge bekannter geometrischer Ungleichungen, die zwischen gewissen Stücken eines Dreiecks gelten. Gerade für mathematische Puzzles in Problemzeitschriften werden sie häufig benötigt, und sei es auch nur als Teil der angestrebten Lösung. Deshalb ist dieser Abschnitt bewußt im Stil eines Kompendiums angelegt, d. h., nicht alle Beziehungen werden bewiesen. Bei den Lösungen der Aufgaben halten wir es jedoch wie in den anderen Abschnitten auch, indem wir vollständige Beweise angeben. Natürlich ist das Material nicht neu, es stützt sich im wesentlichen auf [Bot69] und [Mit89].

Um Schreibarbeit zu sparen, verabreden wir, das Symbol $\triangle$ hinter der betreffenden Ungleichung anzugeben, wenn Gleichheit im Fall eines *gleichseitigen* Dreiecks vorliegt, dagegen das Symbol $\triangleleft$ für Gleichheit im Fall eines *gleichschenkligen* Dreiecks.

G.1.1 Ungleichungen in den Seitenlängen

Wenn nicht anders angegeben, setzen wir nachfolgend stets $a, b, c > 0$ voraus, d. h., zu Strecken entartete Dreiecke schließen wir von vornherein aus. Außerdem müssen die Dreiecksungleichungen (s. Aufgabe U.13) erfüllt sein:

$$|b-c| < a < b+c, \qquad |c-a| < b < c+a, \qquad |a-b| < c < a+b. \tag{G.1}$$

Um nun diese Voraussetzungen unter einen Hut zu bringen, wird häufig folgende Variablensubstitution durchgeführt, die wir bereits aus Aufgabe D.63 kennen:

$$x \equiv \frac{b+c-a}{2} = s-a, \quad y \equiv \frac{c+a-b}{2} = s-b, \quad z \equiv \frac{a+b-c}{2} = s-c, \tag{G.2}$$

wobei $s \equiv \frac{1}{2}(a+b+c)$ der halbe Umfang des Dreiecks ist. Wegen (G.1) gilt dann stets

$$x, y, z > 0. \tag{G.3}$$

Dies hat den Vorteil, daß eine in positiven Größen x, y, z umgeschriebene Ungleichung bereits garantiert, daß tatsächlich ein Dreieck vorliegt, und wir mit (G.3) den Anschluß an die Standard-Ungleichungen des Kapitels U gefunden haben. Natürlich läßt sich die Transformation (G.2) auch umkehren:

$$a = y+z, \qquad b = z+x, \qquad c = x+y. \tag{G.4}$$

Hieraus sehen wir, daß der in einer AM-GM-HM- oder CAUCHY-SCHWARZschen Ungleichung eintretende Fall des Gleichheitszeichens bei $x = y = z$ gerade für ein *gleichseitiges* Dreieck zutrifft.

Bevor wir jedoch zu den Ungleichungen kommen, beweisen wir noch einige oft benötigte Beziehungen. Es zeigt sich nämlich, daß sowohl der Satz (a, b, c) an Variablen als auch (x, y, z) oder auch (R, r, s) ein Dreieck eindeutig bestimmen.