G.1.3 Ungleichungen in den Radien

Aufgrund der in Aufgabe G.1 konstatierten Dualität $(x, y, z) \iff (R, r, s)$ lassen sich viele geometrische Ungleichungen ableiten, wenn z. B. die elementaren symmetrischen Funktionen σ_i der allgemein gültigen Ungleichungen aus Aufgabe U.73 durch die τ_i ersetzt werden. Dies ist immer uneingeschränkt möglich, da hierfür lediglich $x, y, z > 0$ zu fordern ist, und letzteres ist wegen (G.3) stets erfüllt. Aus diesem riesigen Fundus präsentieren wir daher auch nur einige wenige Ungleichungen.

Die ersten drei Ungleichungen sind insofern elementar und nehmen hinsichtlich der zu vermutenden Häufigkeit eine Sonderrolle ein, da sie jeweils paarweise lediglich den Umkreisradius R, den Inkreisradius r sowie den halben Umfang s eines Dreiecks untereinander verknüpfen.