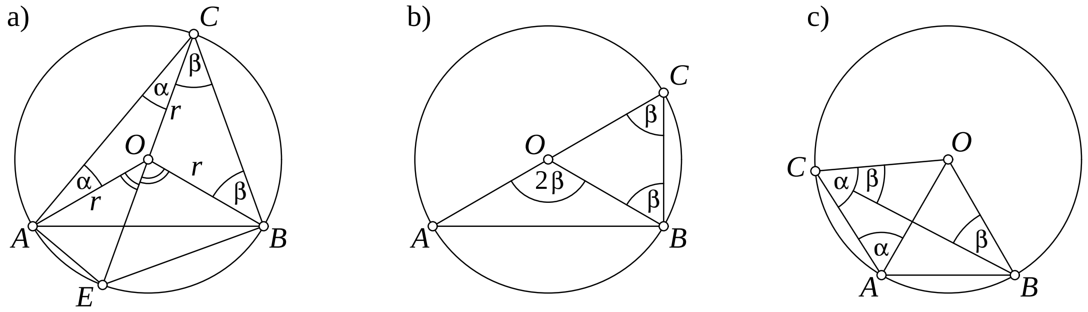
K.2 **Peripherie-Zentriwinkel-Satz.** Die über einem Bogen und einer Sehne liegenden Peripheriewinkel eines Kreises sind untereinander gleich und halb so groß wie der zugehörige Zentriwinkel; Peripheriewinkel, die auf verschiedenen Seiten derselben Sehne liegen, ergänzen sich zu 180°.

K.2 *Beweis:* (Bild) C sei ein beliebiger Punkt auf der Peripherie des Kreises; die dem Zentriwinkel $\measuredangle AOB$ mit O als Mittelpunkt des Kreises und dem Peripheriewinkel $\measuredangle ACB$ gemeinsame Sehne sei AB. Wir können nun vier verschiedene Fälle für die gegenseitige Lage der Punkte C und O bezüglich AB annehmen:

1. O liegt im Innern des Dreiecks ABC (Bild a),
2. O liegt auf einer der beiden Seiten AC oder BC (Bild b),
3. O liegt außerhalb von $\triangle ABC$, jedoch mit C auf derselben Seite bezüglich der Geraden $g(A, B)$ (Bild c) und
4. C und O liegen bezüglich $g(A, B)$ auf verschiedenen Seiten (etwa mit $C = E$, Bild a).



Im Fall *1* sind die Dreiecke AOC und BOC wegen $r \equiv AO = BO = CO$ gleichschenklige Dreiecke mit jeweils gleichen Basiswinkeln $\alpha \equiv \measuredangle ACO = \measuredangle CAO$ und $\beta \equiv \measuredangle BCO = \measuredangle CBO$. Verlängern wir den Radius CO bis zum Schnittpunkt E mit dem Kreis, so sind die Winkel $\measuredangle AOE$ und $\measuredangle EOB$ Außenwinkel dieser gleichschenkligen Dreiecke. Da der Außenwinkel in einem Dreieck gleich der Summe der beiden nicht anliegenden Innenwinkel ist, folgt

$$\measuredangle AOE = \measuredangle ACO + \measuredangle CAO = 2\alpha \quad \text{und} \quad \measuredangle EOB = \measuredangle BCO + \measuredangle CBO = 2\beta.$$

Durch Addition beider Gleichungen erhalten wir für den Zentriwinkel

$$\measuredangle AOB = \measuredangle AOE + \measuredangle EOB = 2(\alpha + \beta) = 2\,\measuredangle ACB.$$

Für den Fall *2* ist der Zentriwinkel $\measuredangle AOB$ gerade Außenwinkel im gleichschenkligen $\triangle BOC$ (AC ist hierbei Durchmesser des Kreises) und damit doppelt so groß wie dessen Basiswinkel, der gleich dem Peripheriewinkel $\measuredangle ACB$ ist. Im Fall *3* folgt die Behauptung aus

$$\measuredangle AOB = \measuredangle COB - \measuredangle COA = (180° - 2\beta) - (180° - 2\alpha) = 2(\alpha - \beta) = 2\,\measuredangle ACB.$$

Liegen dagegen im Fall *4* C und O auf verschiedenen Seiten der Sehne AB (mit $C = E$ in Bild a), so sind die Basiswinkel der gleichschenkligen Dreiecke AOE und EOB

$$\measuredangle EAO = \measuredangle AEO = 90° - \alpha \quad \text{bzw.} \quad \measuredangle BEO = \measuredangle EBO = 90° - \beta$$

und somit

$$\measuredangle AEB = \measuredangle AEO + \measuredangle BEO = 180° - \alpha - \beta = 180° - \measuredangle ACB,$$

d. h., die beiden Peripheriewinkel $\measuredangle ACB$ und $\measuredangle AEB$ sind Supplementwinkel. □