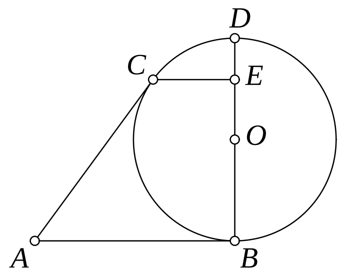
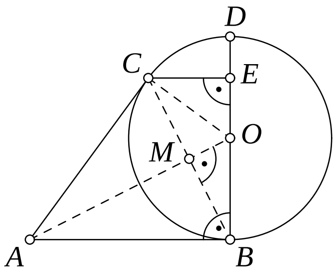
K.24 (Bild) $AB$ und $AC$ seien Tangenten an einen Kreis $O_r$ mit den Berührungspunkten $B$ und $C$. Weiterhin sei $CE$ senkrecht zum Durchmesser $BD$. Man beweise:

a) $BE \cdot BO = AB \cdot CE$,

b) $\dfrac{AB}{\sqrt{BE}} = \dfrac{BO}{\sqrt{ED}}$.



K.24 *Beweis:* (Bild) a) Betrachten wir die behauptete Gleichung genauer, fällt auf, daß $AB$ und $BO$ Katheten des rechtwinkligen Dreiecks $ABO$ sowie $BE$ und $CE$ diejenigen von $\triangle BEC$ sind. Könnten wir die Ähnlichkeit beider Dreiecke nachweisen, wäre der Beweis schon erbracht. Zeichnen wir dazu die Strecken $AO$, $CO$ und $BC$ in unsere Planfigur ein und nennen $M \equiv AO \cap BC$, dann ist wegen $AB = AC$ (gleiche Tangentenabschnitte), $BO = CO$ (gleiche Radien) und $\measuredangle ABO = \measuredangle ACO = 90°$: $\triangle ABO \cong \triangle ACO$, und $AO$ ist Mittelsenkrechte von $BC$. Die rechtwinkligen Dreiecke $ABO$ und $BMO$ haben den Winkel bei $O$ gemeinsam; demzufolge ist




$$\measuredangle BAO = \measuredangle MBO = \measuredangle CBE.$$

Daraus folgt $\triangle ABO \sim \triangle BEC$, also

$$\frac{AB}{BO} = \frac{BE}{CE} \qquad \text{oder} \qquad BE \cdot BO = AB \cdot CE. \tag{K.104}$$

b) Aus dem Höhensatz folgt $CE = \sqrt{BE} \cdot \sqrt{ED}$. Dies in die erste Gleichung in (K.104) eingesetzt und beide Seiten mit $\frac{BO}{\sqrt{BE}}$ multipliziert, ergibt die zweite Gleichung. □