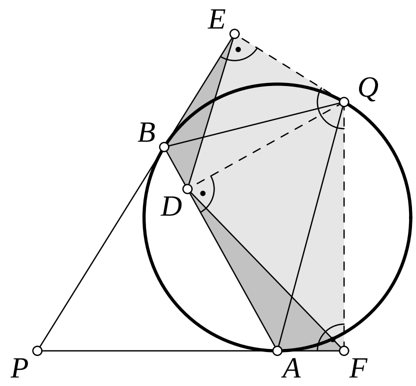
K.26 Von einem außerhalb gelegenen Punkt P werden die Tangenten PA und PB an einen Kreis $k \equiv O_r$ gezogen. Weiterhin werden die Lote von einem beliebigen Punkt $Q \in k$ auf die Geraden AB, PA und PB gefällt. Zeige, daß die Länge des Lotes auf die Gerade AB die mittlere Proportionale aus den Längen der beiden anderen Lote ist.

K.26 *Beweis:* (Bild) Die Behauptung als Gleichung formuliert, lautet

$$DQ^2 = EQ \cdot FQ \qquad \text{oder} \qquad \frac{DQ}{EQ} = \frac{FQ}{DQ},$$



wobei D, E und F die entsprechenden Lotfußpunkte sind. An der zweiten Gleichung fällt auf, daß deren linke Seite ausschließlich Längen der Dreieckseiten von $\triangle DEQ$, die rechte diejenigen von $\triangle DFQ$ enthält. Schön, wenn wir also zeigen können, daß beide Dreiecke ähnlich sind, d. h. der Nachweis zweier Paare kongruenter Winkel sollte genügen. Betrachten wir uns beide Dreiecke genauer, vermuten wir

$$\measuredangle DQE = \measuredangle DQF.$$

Hier hilft die Erkenntnis, daß D, F auf dem THALES-Kreis über AQ sowie D, E auf dem THALES-Kreis über BQ liegen, d. h., $AFQD$ und $BDQE$ sind Sehnenvierecke. In solchen sind gegenüberliegende Winkel bekanntlich supplementär (s. Aufgabe V.21), also gilt:

$$\measuredangle DQE = 180^\circ - \measuredangle DBE = 180^\circ - \measuredangle DAF = \measuredangle DQF.$$

(Dabei wurde benutzt, daß das Dreieck PAB gleichschenklig ist und demzufolge gleiche Außenwinkel $\measuredangle DBE = \measuredangle DAF$ besitzt.) Schließlich fehlt noch der Nachweis von (z. B.) $\measuredangle QDE = \measuredangle QFD$, welcher jedoch nicht schwer fallen dürfte:

$$\begin{aligned}
\measuredangle QDE &= \measuredangle QBE && \text{(Peripheriewinkelsatz)}\\
&= \measuredangle QAB && \text{(Sehnen-Tangentenwinkel-Satz)}\\
&= \measuredangle QAD && \text{(lt. Voraussetzung)}\\
&= \measuredangle QFD && \text{(Peripheriewinkelsatz).} \quad \square
\end{aligned}$$