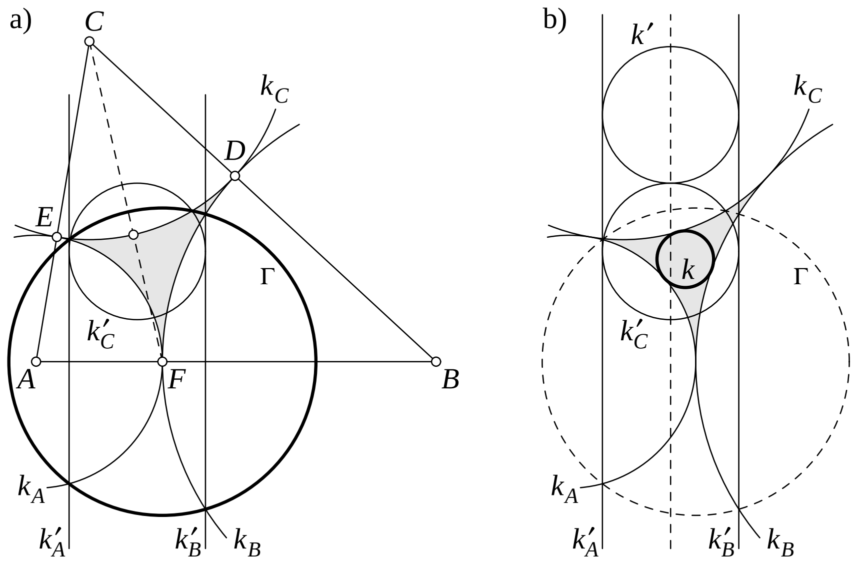
K.42 **Soddys Kreise.** In einem Dreieck ABC werden drei Kreise k_A, k_B, k_C mit Mittelpunkten in den Eckpunkten so gezeichnet, daß sie sich paarweise auf den Dreieckseiten berühren. Gesucht ist derjenige Kreis im Innern des Dreiecks ABC, der k_A, k_B, k_C von außen berührt.

K.42 Das Problem besteht aus zwei Teilen: *1.* die drei Kreise k_A, k_B, k_C zu bestimmen und *2.* den Berührungskreis k zu finden. Bezeichnen wir im Teil *1* die Radien der drei Kreise mit r_A,



r_B bzw. r_C, so lassen sich nach Bild a) unmittelbar die Gleichungen

$$r_B + r_C = a, \qquad r_C + r_A = b, \qquad r_A + r_B = c$$

aufstellen, die sich leicht nach den Unbekannten r_A, r_B, r_C auflösen lassen:

$$r_A = \frac{1}{2}(b + c - a), \qquad r_B = \frac{1}{2}(c + a - b), \qquad r_C = \frac{1}{2}(a + b - c)$$

(vgl. auch Aufgabe D.63 und Abschnitt G.1.1). Die Berührungspunkte D, E und F sind mithin sofort zu konstruieren; es zeigt sich, daß sie isotomische Punkte zu den *Halbumfangspunkten* (s. Abschnitt D.2, insbesondere Aufgabe D.39) sind.

Im Teil *2* gilt es, einen geeigneten Inversionskreis zu finden, der das Berührungsproblem KKK auf das Problem GGK vereinfacht (s. Abschnitt A.3). Dies erreichen wir jedoch nur, wenn zwei der ursprünglichen Kreise durch den Mittelpunkt des Inversionskreises Γ gehen (vgl. Bild K.2 b,c). Damit ist etwa F eine gute Wahl für den Mittelpunkt von Γ; sein Radius kann beliebig gewählt werden (Bild a). Die nunmehr bekannten Original-Kreise k_A, k_B, k_C gehen bei der Inversion in die parallelen Bild-Geraden k'_A, k'_B sowie den Bild-Kreis k'_C über. Letzterer muß nach dem Satz über die Invarianz der Schnittwinkel (vgl. Aufgabe K.34) die beiden Bild-Geraden tangieren (da sich die Original-Kreise ja berühren). Aus gleichem Grunde muß, da der gesuchte Kreis k die drei Original-Kreise berühren soll, sein Bild-Kreis k' die Bild-Geraden k'_A, k'_B und den Bild-Kreis k'_C tangieren (Bild b). k' zu finden ist nicht schwer; wir brauchen offensichtlich k'_C auf der Mittelparallelen von k'_A und k'_B nur so zu verschieben, daß sich beide gerade berühren. Da es hierbei zwei Möglichkeiten gibt, existieren auch zwei Lösungen: einer der gesuchten Kreise tangiert die Original-Kreise von innen, der andere von außen (im Bild nicht gezeichnet).