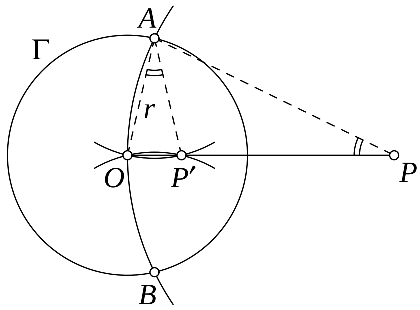
$\boxed{\text{K.44}}$ Man zeige, daß sich der zu P inverse Punkt P' ausschließlich mit Hilfe des Zirkels konstruieren läßt.

K.44 *Beweis:* (Bild) Betrachten wir zuerst den Fall, daß der gegebene Punkt P außerhalb des Inversionskreises $\Gamma \equiv O_r$ liegt. Wir beschreiben den Kreisbogen P_O, der Γ in A und B schneidet. Um diese beiden Punkte schlagen wir Kreisbögen mit dem Radius r, welche sich (außer in O) in einem Punkt P' auf der Geraden OP schneiden. Für die gleichschenkligen Dreiecke OAP und $OP'A$ gilt



$$\measuredangle OAP = \measuredangle POA = \measuredangle OP'A,$$

so daß die Dreiecke ähnlich sind und daher

$$\frac{OP}{OA} = \frac{OA}{OP'}, \quad \text{oder} \quad OP \cdot OP' = r^2$$

ist. Somit ist P' der gesuchte inverse Punkt zu P.

Liegt dagegen P im Innern von Γ, behelfen wir uns mit folgendem Trick: Die Strecke OP wird ausgehend vom Inversionszentrum mit dem Zirkel so oft hintereinander abgetragen (wie das geht, vgl. Aufgabe A.42), bis wir zu einem Punkt Q außerhalb von Γ gelangen. Nach oben beschriebener Methode wird dessen inverser Punkt Q' konstruiert, und es gilt mit $n \in \mathbb{N}$:

$$r^2 = OQ' \cdot OQ = OQ' \cdot (n \cdot OP) = (n \cdot OQ') \cdot OP.$$

Mithin ist derjenige Punkt P', für den $OP' = n \cdot OQ'$ ist, der gesuchte inverse Punkt. □