K.61 **4-Miquel-Punkt.** Die Umkreise der vier Dreiecke, die durch die Seiten eines vollständigen Vierseits gebildet werden, schneiden sich in einem Punkt.

K.61 *Beweis:* (Bild) M sei als zweiter Schnittpunkt der Umkreise von $\triangle BDE$ und $\triangle CDF$ der 4-Miquel-Punkt. Eine kleine „Winkel-Jagd“ ergibt:

$$\begin{aligned}\measuredangle CAE = \measuredangle FAB &= \measuredangle FBE - \measuredangle AFB \qquad \text{(Außenwinkel in } \triangle FAB\text{)}\\ &= 180^\circ - \measuredangle DME - \measuredangle AFB \qquad \text{(Sehnenviereck } BEMD\text{)}\\ &= 180^\circ - (\measuredangle CME - \measuredangle CMD) - \measuredangle AFB \qquad \text{(Winkeldifferenz)}\\ &= 180^\circ - \measuredangle CME \qquad \text{(Sehnenviereck } CDMF\text{)}.\end{aligned}$$

Nach der Umkehrung des Peripheriewinkelsatzes liegen A, C, M, E auf einem Kreis; M also auf dem Umkreis von $\triangle AEC$. Nun ist unsere Figur vom Standpunkt der projektiven Geometrie völlig symmetrisch einer Linie ADM, also sollte es nicht schwer fallen zu zeigen, daß $ABMF$ ebenfalls ein Sehnenviereck ist. Der Vollständigkeit halber schreiben wir alles ohne Kommentar hintereinander: $\measuredangle BAF = \measuredangle EAC = \measuredangle ECF - \measuredangle AEC = 180^\circ - \measuredangle DMF - \measuredangle AEC = 180^\circ - (\measuredangle BMF - \measuredangle BMD) - \measuredangle AEC = 180^\circ - \measuredangle BMF$. Mit derselben Begründung wie oben liegt also M auch auf dem Umkreis von $\triangle ABF$. $\square$