$\boxed{\text{K.63}}$ **Satz von Johnson.** Wenn drei gleiche Kreise durch einen Punkt gehen, dann ist derjenige Kreis, der durch die drei anderen Schnittpunkte der Kreise geht, genauso groß.

K.63 *Beweis:* (Bild) P sei der gemeinsame Schnittpunkt der drei Kreise k_1, k_2, k_3 mit dem Radius r und den Mittelpunkten O_1, O_2, O_3 sowie $P_1 \equiv k_2 \cap k_3$, $P_2 \equiv k_3 \cap k_1$, $P_3 \equiv k_1 \cap k_2$. Dann sind $PO_2P_1O_3$, $PO_3P_2O_1$ und $PO_1P_3O_2$ offensichtlich Rhomben mit untereinander gleicher Seitenlänge r. Nun sei O der Punkt, der $P_2O_1P_3$ zu einem Rhombus ergänzt; dieses ist wegen $O_1P_2 = O_1P_3$ immer möglich. Somit ist $OP_2 = OP_3 = r$. Da sich in einem Rhombus die Diagonalen senkrecht halbieren, ist OO_1 zugleich Mittelsenkrechte der Seite P_2P_3 im Dreieck $P_1P_2P_3$. Genauso gibt es einen Punkt O', der $P_3O_2P_1$ zu einem Rhombus ergänzt, es folgt hier: $O'P_3 = O'P_1 = r$. Da aber $O'O_2$ ebenfalls Mittelsenkrechte (von P_3P_1) ist, und sich zwei Mittelsenkrechten im Umkreismittelpunkt eines Dreiecks schneiden (vgl. Aufgabe D.1), muß $O = O'$ und damit $OP_1 = OP_2 = OP_3 = r$ gelten. □ — Vgl. Aufgabe D.28.