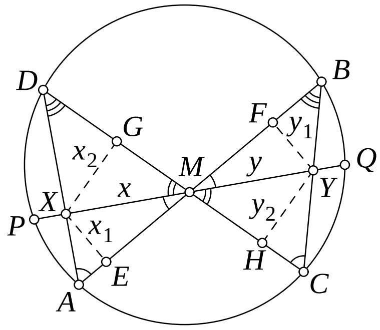
K.71 **Schmetterling-Satz.**[†] Durch den Mittelpunkt M einer Sehne PQ eines Kreises werden zwei weitere Sehnen AB und CD gezeichnet; die Sehnen AD und BC schneiden PQ in den Punkten X und Y. Dann ist M der Mittelpunkt von XY.

[†] Dieser Name wird verständlich, wenn man sich die Figur aufzeichnet.

K.71 *Beweis:* (Bild) Wir fällen von X und Y die Lote x_1 und y_1 auf AB sowie x_2 und y_2 auf CD. Dadurch entstehen mehrere Paare ähnlicher rechtwinkliger Dreiecke:



$$\triangle MEX \sim \triangle MFY, \quad \triangle MGX \sim \triangle MHY,$$
$$\triangle AEX \sim \triangle CHY, \quad \triangle DGX \sim \triangle BFY.$$

Mit den Abkürzungen $MP = MQ \equiv a$, $MX \equiv x$ und $MY \equiv y$ können wir nun folgende Gleichungen aufstellen:

$$\frac{x}{y} = \frac{x_1}{y_1}, \quad \frac{x}{y} = \frac{x_2}{y_2}, \quad \frac{x_1}{y_2} = \frac{AX}{CY}, \quad \frac{x_2}{y_1} = \frac{XD}{YB},$$

aus denen mit Hilfe des Sehnensatzes

$$\frac{x^2}{y^2} = \frac{x_1}{y_1} \cdot \frac{x_2}{y_2} = \frac{x_1}{y_2} \cdot \frac{x_2}{y_1} = \frac{AX \cdot XD}{CY \cdot YB} = \frac{PX \cdot XQ}{PY \cdot YQ} = \frac{(a-x)(a+x)}{(a+y)(a-y)} = \frac{a^2 - x^2}{a^2 - y^2}$$

folgt. Betrachten wir in dieser Gleichungskette den ersten und letzten Term, folgt wie behauptet $x = y$. $\square$