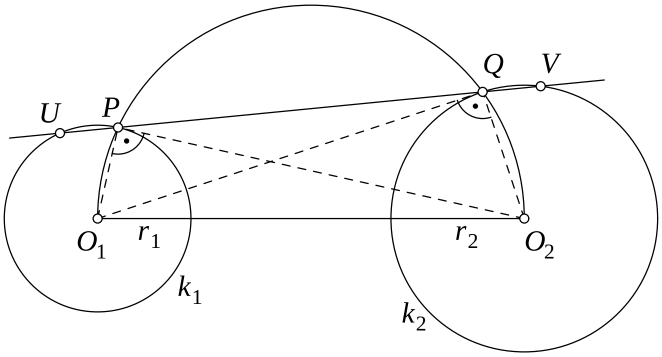
$\boxed{\text{K.75}}$ Gegeben seien zwei sich nicht schneidende Kreise k_1, k_2 mit den Mittelpunkten O_1, O_2 und Radien r_1, r_2. Der THALES-Halbkreis über O_1O_2 schneide k_1 und k_2 in P bzw. Q; die Gerade PQ beide Kreise ein zweites Mal in den Punkten U bzw. V. Beweise, daß $PU = QV$ gilt.

K.75 *Beweis:* (Bild) PQ ist Sekante in beiden Kreisen, weshalb sich mit dem Sekantensatz etwas anfangen lassen sollte:

$$\begin{aligned}|O_1O_2|^2 - r_2^2 - r_1^2 &= |QO_1|^2 - r_1^2 \quad \text{(Satz des Pythagoras)}\\ &= (QO_1 - r_1)\cdot(QO_1 + r_1) \quad \text{(Sekantensatz mit } QO_1\text{)}\\ &= QP \cdot QU \quad \text{(Sekantensatz mit } QP\text{)}.\end{aligned}$$

Ebenso finden wir

$$\begin{aligned}&|O_1O_2|^2 - r_1^2 - r_2^2 = |PO_2|^2 - r_2^2\\ &= (PO_2 - r_2)\cdot(PO_2 + r_2)\\ &= PQ \cdot PV.\end{aligned}$$



Da in beiden Gleichungen die linken Seiten gleich sind, müssen es auch die rechten sein. Mit $QP = PQ$ folgt hieraus $QU = PV$ oder $QP + PU = PQ + QV$ und schließlich $PU = QV$. □