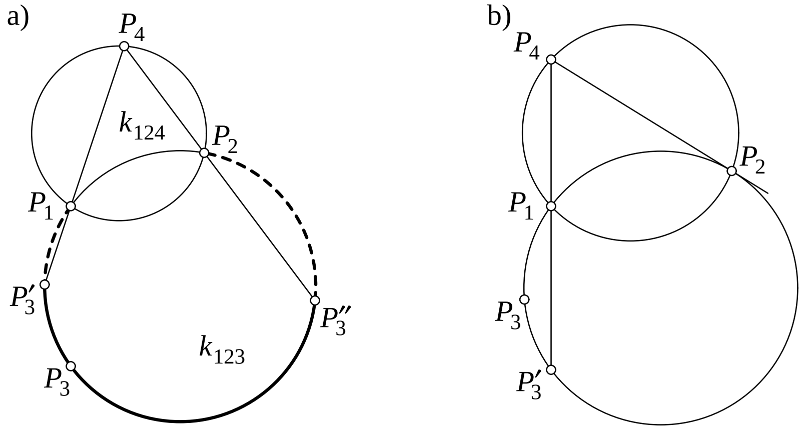
K.76 In der Ebene seien 4 Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 gegeben, die weder sämtlich auf einem Kreis noch auf einer Geraden liegen. Können diese Punkte so mit Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 bezeichnet werden, daß der Punkt Q_4 innerhalb des durch die Punkte Q_1, Q_2, Q_3 gehenden Kreises liegt?

K.76 (Bild) Wir zeichnen durch die Punkte P_1, P_2, P_3 und P_1, P_2, P_4 jeweils einen Kreis k_{123} bzw. k_{124}. Wenn der Punkt P_4 in dem Kreis k_{123} liegt, ist mit der Bezeichnung $Q_i \equiv P_i$, $i = 1, 2, 3, 4$ die gestellte Frage zu bejahen, ebenso, wenn der Punkt P_3 in dem Kreis k_{124} liegt; in diesem Fall bezeichnen wir $Q_i \equiv P_i$, $i = 1, 2$ sowie $Q_3 \equiv P_4$ und $Q_4 \equiv P_3$. Wir wollen daher



im weiteren annehmen, daß keiner der beiden Fälle vorliege. Wie leicht zu erkennen ist, zerfällt dann der außerhalb des Kreises k_{124} liegende Bogen des Kreises k_{123} in drei Teile: P_1P_3', $P_3'P_3''$, $P_3''P_2$ (Bild a); wenn dabei der Punkt P_3 auf P_1P_3' liegt, so liegt der Punkt $Q_4 \equiv P_1$ in dem Kreis k_{234}; wenn der Punkt P_3 auf $P_3''P_2$ liegt, so liegt der Punkt $Q_4 \equiv P_2$ im Kreis k_{134}; wenn der Punkt P_3 auf $P_3'P_3''$ liegt, befindet sich $Q_4 \equiv P_1$ innerhalb von k_{234} *und* $\mathbb{Q}_4 \equiv P_2$ innerhalb von k_{134}. Falls eins oder zwei von den drei oben genannten Teilbögen verschwinden (etwa wenn P_4P_2 gerade eine Tangente an k_{123} ist, Bild b), ist die Antwort auch hierbei stets bejahend.