K.2 Inversion am Kreis

Eine *Inversion* läßt sich am besten mit folgender Geschichte erklären: Wie fängt ein Mathematiker einen Löwen? Ganz einfach, er geht in einen Käfig, den er von innen verschließt. Dann führt er eine Inversion durch und schon ist der Löwe gefangen und er selbst wieder draußen[†]. Jakob Steiner dachte sich um 1830 diese Transformation aus: Gegeben sei ein Kreis Γ mit dem Mittelpunkt O (dem *Zentrum* der Inversion) und dem Radius r sowie ein Punkt P, der von O verschieden ist. Dann ist der zu P *inverse Punkt* P' derjenige auf dem Strahl OP, der von O die Entfernung

$$OP' = \frac{r^2}{OP} \tag{K.1}$$

hat (Bild K.2). Beide Punkte P und P' heißen *inverse Punkte* in bezug auf Γ. Aus dieser Definition folgt, daß, falls P' der inverse Punkt zu P ist, ebenso auch P invers zu P' ist. Wir haben es also mit einer *geometrischen Transformation* oder *Abbildung* zu tun, die zweimal hintereinander ausgeführt wieder das Ursprüngliche liefert.

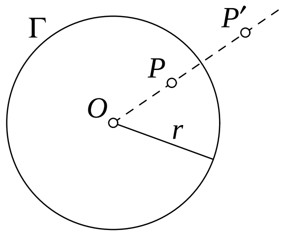

Bild K.2 Inversion eines Punktes an einem Kreis

Eine Inversion vertauscht das Innere von Γ mit dem Äußeren. Die einzigen Punkte, die unverändert bleiben, sind die Punkte auf dem Kreis Γ selbst.

[†]Diese Aktion will jedoch wohl überlegt sein, denn das gesamte Universum befände sich anschließend im Käfig.

K.2.1 Eigenschaften der Inversion

Die wichtigste Eigenschaft einer Inversion ist, daß sie Geraden und Kreise in Geraden und Kreise überführt. Wie gewohnt wird dies in folgende Aufgabe verpackt: