L.12 Gegeben seien n Teilmengen der Menge $M = \{1, 2, 3, \ldots, 105\}$ mit jeweils 14 Elementen, so dass jeweils zwei der Mengen genau ein gemeinsames Element haben, aber keine drei Mengen ein Element gemeinsam haben. Man zeige: Ist jedes Element von M in wenigstens einer der Teilmengen enthalten, so ist $n = 14$ oder $n = 15$.

L.12 *Beweis:* Die Bedingungen liefern nach dem Prinzip des Ein- und Ausschlusses die Gleichung $105 = 14n - \binom{n}{2}$ mit den genannten Lösungen. Das hier auch wirklich die geforderten Teilmengen existieren, zeigt man, indem man die entsprechenden Mengen einfach angibt:

$$
\begin{aligned}
M_1 &= \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots, 14\},\\
M_2 &= \{1, 15, 16, 17, 18, \ldots, 27\},\\
M_3 &= \{2, 15, 28, 29, 30, \ldots, 39\},\\
M_4 &= \{3, 16, 28, 40, 41, \ldots, 50\},\\
M_5 &= \{4, 17, 29, 40, 51, \ldots, 60\},\\
&\vdots\\
M_{14} &= \{13, 26, 38, 49, 60, \ldots, 105\},\\
(M_{15} &= \{14, 27, 39, 50, 60, \ldots, 105\})\,. \quad \square
\end{aligned}
$$