$\boxed{\text{L.14}}$ **Eulersche Phi-Funktion.** Sei $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ die Primfaktorenzerlegung der natürlichen Zahl n. Man bestimme die Anzahl $\phi(n)$ der zu n teilerfremden natürlichen Zahlen kleiner oder gleich n. (Diese Funktion ϕ heißt auch *Eulersche ϕ-Funktion* und spielt in der Zahlentheorie eine große Rolle.)

L.14 Ähnlich wie zuvor: Von allen n Zahlen sind diejenigen abzuziehen, die durch einen der Primfaktoren von n teilbar sind. Das sind $\frac{n}{p_1} + \frac{n}{p_2} + \ldots + \frac{n}{p_k}$. Dabei wurden aber die Zahlen, die durch zwei der Primfaktoren teilbar sind, mehrfach abgezogen. Ein- und Ausschluss liefert, so weiterschließend,

$$
\begin{aligned}
\phi(n) &= n - \left(\frac{n}{p_1} + \frac{n}{p_2} + \ldots + \frac{n}{p_k}\right) + \left(\frac{n}{p_1 p_2} + \frac{n}{p_1 p_3} + \ldots + \frac{n}{p_{k-1} p_k}\right) - \ldots \pm \frac{n}{p_1 \cdots p_k} \\
&= n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right).
\end{aligned}
$$