L.2 Mengenlehre

Was genau eine *Menge* ist, darüber haben sich schon eine Reihe von Mathematikern ihre Köpfe zerbrochen und erdachten – wie GEORG CANTOR – so schlaue Sätze wie:

> *Eine Menge ist eine Zusammenfassung bestimmter, wohlunterschiedener Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen. Diese Objekte heißen die Elemente der Menge.*

Dies trifft es aber auch ziemlich genau. Mengen werden dabei meist mit großen Buchstaben $M, N, \ldots$ bezeichnet, die Elemente mit kleinen Buchstaben $a, b, c, \ldots$. Man schreibt die Elemente der Menge dann in geschweiften Klammern, wie zum Beispiel $M = \{2, 3, 5, 7\}$. Ist a ein Element der Menge M, so schreibt man kurz $a \in M$, andernfalls $a \notin M$. Die Menge, die gar kein Element enthält, bekommt den Namen *leere Menge* und wird mit $\emptyset$ bezeichnet. Darüber hinaus gibt es noch *Einermengen* wie $M = \{a\}$ oder *Zweiermengen* wie $M = \{\pm 1\}$.

Hat eine Menge M nur endlich viele Elemente, so bezeichnet man mit $\mathrm{card}(M)$ oder einfach nur $|M|$ die Anzahl dieser Elemente, die sogenannte *Kardinalität* der Menge. Ist jedes Element einer Menge A auch Element der Menge B, so sagt man: „A ist *Teilmenge* von B“ und schreibt dafür $A \subseteq B$. Es gilt damit z. B. für alle Mengen M: $\emptyset \subseteq M$.

Für Mengen gibt es *Verknüpfungsoperationen*, die in engem Zusammenhang zu den Junktoren der Aussagenlogik stehen. Sind A und B Teilmengen einer Obermenge X, so schreibt man

$A \setminus B = \{a \in A \mid a \notin B\}$	für die *Differenzmenge* A minus B,
$\mathcal{C}_X(A) = \{x \in X \mid x \notin A\} = X \setminus A$	für das *Komplement* der Menge A (in X),
$A \cap B = \{x \in X \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}$	für den *Durchschnitt* der Mengen A und B,
$A \cup B = \{x \in X \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}$	für die *Vereinigung* der Mengen A und B.

Die erste Zeile läßt sich dabei etwa wie folgt aussprechen: Die Differenzmenge $A \setminus B$ ist die Menge aller Elemente a aus A mit der Eigenschaft (das Zeichen „$|$“), nicht in B enthalten zu sein.

Diese Operationen lassen sich auch sehr gut in sogenannten *Venn-Diagrammen* (benannt nach JOHN VENN, 1834–1923) veranschaulichen (Bild L.1).

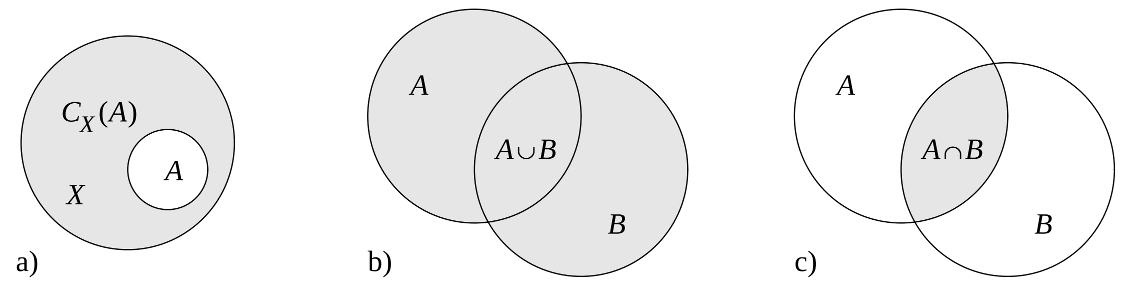

Bild L.1 VENN-Diagramm a) des Komplements $\mathcal{C}_X(A)$, b) der Vereinigung $A \cup B$ und c) des Durchschnitts $A \cap B$

Den Durchschnitt und die Vereinigung von Mengen kann man auch über mehr als zwei Mengen bilden. Hat man die Mengen $A_1, A_2, \ldots, A_n$, so schreibt man dafür $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ bzw. $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$. Für die Kardinalität der Vereinigung zweier Mengen A und B verwendet man schon meist intuitiv die Formel

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|. \tag{L.1}$$

Diese kann man auch ohne weiteres an Bild L.1 ablesen. Insbesondere gilt für *disjunkte* (elementfremde) Mengen A und B: $|A \cup B| = |A| + |B|$. Liegen dagegen mehr als zwei Mengen vor, gilt das folgende

Prinzip des Ein- und Ausschlusses. Für die Vereinigung endlich vieler Mengen $A_1, A_2, \ldots, A_n$ gilt:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1\le i<j\le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1\le i<j<k\le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^{n+1}\left|\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right| \tag{L.2}$$

An folgenden Aufgaben soll dieses wichtige Prinzip trainiert werden.