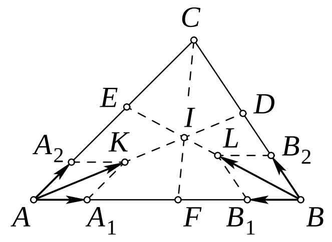
$\boxed{\text{M.1}}$ Von einem Dreieck seien die Ortsvektoren der Eckpunkte gegeben. Man finde einen Ausdruck für die Lage des Inkreismittelpunktes I.

M.1 (Bild) Betrachten wir I als Schnittpunkt der Winkelhalbierenden von $\measuredangle CAB$ und $\measuredangle CBA$. Beide Winkelhalbierenden fallen mit den Diagonalen AK bzw. BL zweier Rhomben AA_1KA_2 bzw. BB_2LB_1 zusammen, deren Seiten parallel zu den jeweiligen Dreieckseiten sind und die Länge 1 haben:

$$\overrightarrow{AK} = \frac{\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}}{c} + \frac{\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}}{b}.$$



Für den Ortsvektor zum Inkreismittelpunkt können wir somit

$$\boldsymbol{i} = \boldsymbol{a} + \lambda\left(\frac{\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}}{c} + \frac{\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}}{b}\right), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

mit einem im weiteren zu bestimmenden reellen Parameter λ schreiben. Analog finden wir vom Eckpunkt B ausgehend

$$\boldsymbol{i} = \boldsymbol{b} + \mu\left(\frac{\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}}{a} + \frac{\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}}{c}\right), \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

Gleichsetzen beider Ausdrücke für $\boldsymbol{i}$ ergibt folgende Vektorgleichung:

$$\left(1 - \frac{b+c}{bc}\lambda - \frac{\mu}{c}\right)\boldsymbol{a} + \left(\frac{\lambda}{c} - 1 + \frac{c+a}{ca}\mu\right)\boldsymbol{b} + \left(\frac{\lambda}{b} - \frac{\mu}{a}\right)\boldsymbol{c} = 0.$$

Da $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ linear unabhängig sind, muß jeder (reelle) Klammerausdruck vor den Vektoren einzeln null sein, damit die Gleichung erfüllt ist. Diese Bedingungen stellen ein (überbestimmtes) lineares Gleichungssystem für die unbekannten Parameter λ, μ dar, welches die Lösung

$$\lambda = \frac{bc}{a+b+c}, \quad \mu = \frac{ca}{a+b+c}$$

hat. Dies schließlich liefert den gewünschten Ausdruck

$$\boldsymbol{i} = \frac{a\boldsymbol{a} + b\boldsymbol{b} + c\boldsymbol{c}}{a+b+c},$$

der ebenso wie derjenige für den Schwerpunkt $\boldsymbol{g}$ bemerkenswert symmetrisch ist.
Bemerkung: Bezeichnen wir die Schnittpunkte der Winkelhalbierenden mit den gegenüberliegenden Seiten mit D, E, F, so finden wir leicht die mitunter nützlichen Ausdrücke

$$\boldsymbol{d} = \frac{b\boldsymbol{b} + c\boldsymbol{c}}{b+c}, \quad \boldsymbol{e} = \frac{c\boldsymbol{c} + a\boldsymbol{a}}{c+a}, \quad \boldsymbol{f} = \frac{a\boldsymbol{a} + b\boldsymbol{b}}{a+b}.$$