M.10 Man zeige, daß beide Aussagen äquivalent sind:

- Die Gerade GI ist parallel zu einer Seite des Dreiecks ABC.
- Die Seitenlängen a, b, c des Dreiecks bilden eine arithmetische Folge.

M.10 *Beweis:* Nach Aufgabe M.1 ist

$$\overrightarrow{GI} = \left(\frac{a}{a+b+c} - \frac{1}{3}\right)\boldsymbol{a} + \left(\frac{b}{a+b+c} - \frac{1}{3}\right)\boldsymbol{b} + \left(\frac{c}{a+b+c} - \frac{1}{3}\right)\boldsymbol{c}. \tag{M.103}$$

Wird nun z. B. $GI \parallel AB$ vorausgesetzt, gilt die Vektorgleichung

$$\overrightarrow{GI} = \lambda(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}), \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

welche wegen der linearen Unabhängigkeit von $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{c}$ auf die drei skalaren Gleichungen

$$\begin{aligned}
\lambda &= \frac{a}{a+b+c} - \frac{1}{3} = \frac{2a-(b+c)}{3(a+b+c)}, \\
-\lambda &= \frac{b}{a+b+c} - \frac{1}{3} = \frac{2b-(c+a)}{3(a+b+c)}, \\
&\frac{c}{a+b+c} - \frac{1}{3} = 0
\end{aligned}$$

führt. Die letzte Gleichung ist äquivalent mit $c = \frac{1}{2}(a+b)$; die ersten beiden liefern nach Addition dasselbe Resultat. Da c das arithmetische Mittel von a und b ist, bilden a, c und b demnach eine arithmetische Folge.
Wird andererseits $2c = a + b$ vorausgesetzt, so folgt nach (M.103)

$$\overrightarrow{GI} = \left(\frac{a}{3c} - \frac{1}{3}\right)\boldsymbol{a} + \left(\frac{b}{3c} - \frac{1}{3}\right)\boldsymbol{b} = \frac{b-a}{3c}(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}),$$

also $GI \parallel AB$. $\square$