M.12 In einem beliebigen konvexen Viereck $ABCD$ seien K und L die Mittelpunkte der Diagonalen AC bzw. BD. Man beweise: Ein Punkt P im Innern des Vierecks liegt genau dann auf der Geraden KL, wenn gilt:

$$[PAB] + [PCD] = [PBC] + [PDA].$$

M.12 *Beweis:* Die Mittelpunkte K und L der Diagonalen AC bzw. BD seien durch $\boldsymbol{k} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})$ bzw. $\boldsymbol{l} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{d})$ gegeben, wobei $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$ wie gewohnt die Ortsvektoren der Eckpunkte des Vierecks sind. Jeder Punkt P auf der Geraden KL hat nun die Parameterdarstellung

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{k} + \lambda(\boldsymbol{l} - \boldsymbol{k}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}) + \frac{\lambda}{2}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{d}-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}), \qquad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{M.103}$$

Liegt P im Innern des Vierecks, so sind die Vektoren $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{PC}$, $\overrightarrow{PD}$ o. B. d. A. im positiven Drehsinn angeordnet, und wir können die Flächen mit Hilfe des Vektorproduktes ausrechnen:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{[PAB]} &= \overrightarrow{PA} \times \overrightarrow{PB} = (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{p}) \times (\boldsymbol{b}-\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + (\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{p},\\
\overrightarrow{[PCD]} &= \overrightarrow{PC} \times \overrightarrow{PD} = (\boldsymbol{c}-\boldsymbol{p}) \times (\boldsymbol{d}-\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d} + (\boldsymbol{d}-\boldsymbol{c}) \times \boldsymbol{p}.
\end{aligned}$$

Wir erhalten daraus mit (M.103)

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{[PAB]} + \overrightarrow{[PCD]} &= \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d} + (\boldsymbol{b}+\boldsymbol{d}-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}) \times \boldsymbol{p} \\
&= \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{d}-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}) \times (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}) \\
&= \frac{1}{2}(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} + \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d} + \boldsymbol{d} \times \boldsymbol{a}).
\end{aligned} \tag{M.104}$$

Dieser Ausdruck ist bemerkenswert symmetrisch, so daß es a priori keinen Grund gibt, daß für $\overrightarrow{[PBC]} + \overrightarrow{[PDA]}$ etwas anderes herauskäme; eine Rechnung bestätigt diese Annahme. Schließlich folgern wir – da der Parameter λ *nicht* enthalten ist – daß die Behauptung $[PAB] + [PCD] = [PBC] + [PDA]$ somit für *alle* Punkte auf der Geraden KL gilt.
Nehmen wir umgekehrt an, daß die zuletzt genannte Gleichung für beliebige $\boldsymbol{p}$ gilt, so folgt mit

$$\overrightarrow{[PBC]} + \overrightarrow{[PDA]} = \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} + \boldsymbol{d} \times \boldsymbol{a} - (\boldsymbol{b}+\boldsymbol{d}-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}) \times \boldsymbol{p} \tag{M.105}$$

nach Gleichsetzen mit (M.104):

$$(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{d}-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}) \times \boldsymbol{p} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} + \boldsymbol{d} \times \boldsymbol{a} - \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}).$$

Setzen wir hier $2\boldsymbol{p} = \alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} + \gamma\boldsymbol{c} + \delta\boldsymbol{d}$ mit beliebigen $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ ein, so entsteht nach Ausmultiplizieren und Koeffizientenvergleich

$$\begin{aligned}
&\alpha = \gamma, \quad \beta = \delta, \quad \alpha + \beta = 1, \\
\Longrightarrow \qquad &\boldsymbol{p} = \frac{1}{2}[\beta(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{d}) + (1-\beta)(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})] = \frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}) + \frac{\beta}{2}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{d}-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}).
\end{aligned}$$

Dies ist jedoch genau wie (M.103) die Parameterdarstellung der Gerade durch K und L. □
Bemerkung: Im Falle, daß $ABCD$ ein *Tangentenviereck* ist, heißt diese Gerade auch NEWTONsche Gerade (vgl. Aufgabe V.36).