$\boxed{\text{M.13}}$ **(Verallgemeinerte) Leibniz-Identität.** P sei ein Punkt in der Ebene des Dreiecks ABC sowie M ein beliebiger Punkt im Raum. Mit den Seitenlängen a, b, c und

$$\overrightarrow{MP} = \frac{x_1 \overrightarrow{MA} + x_2 \overrightarrow{MB} + x_3 \overrightarrow{MC}}{x_1 + x_2 + x_3}, \qquad x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$$

als gewichtetem Mittel gilt dann:

$$\begin{aligned} (x_1 + x_2 + x_3)^2 \, MP^2 = {} & (x_1 + x_2 + x_3) \left(x_1 MA^2 + x_2 MB^2 + x_3 MC^2 \right) \\ & - \left(x_2 x_3 a^2 + x_3 x_1 b^2 + x_1 x_2 c^2 \right) \end{aligned} \tag{M.6}$$

M.13 *Beweis:* Wir brauchen nur die Voraussetzung auf beiden Seiten zu quadrieren und einige algebraische Umformungen vornehmen:

$$\begin{aligned}
(x_1 + x_2 + x_3)^2 \, MP^2 &= \left(x_1 \overrightarrow{MA} + x_2 \overrightarrow{MB} + x_3 \overrightarrow{MC}\right)^2 = x_1^2 \, MA^2 + x_2^2 \, MB^2 + x_3^2 \, MC^2 \\
&\quad + 2x_2x_3 \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + 2x_3x_1 \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA} + 2x_1x_2 \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} \\
&= (x_1 + x_2 + x_3) \left(x_1 MA^2 + x_2 MB^2 + x_3 MC^2\right) - x_2x_3 (MB^2 + MC^2 - 2 \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC}) \\
&\quad - x_3x_1 (MC^2 + MA^2 - 2 \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA}) - x_1x_2 (MA^2 + MB^2 - 2 \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}) \\
&= (x_1 + x_2 + x_3) \left(x_1 MA^2 + x_2 MB^2 + x_3 MC^2\right) - x_2x_3 \, |\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|^2 \\
&\quad - x_3x_1 \, |\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MA}|^2 - x_1x_2 \, |\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}|^2 \\
&= (x_1 + x_2 + x_3) \left(x_1 MA^2 + x_2 MB^2 + x_3 MC^2\right) - (x_2x_3a^2 + x_3x_1b^2 + x_1x_2c^2). \quad \square
\end{aligned}$$