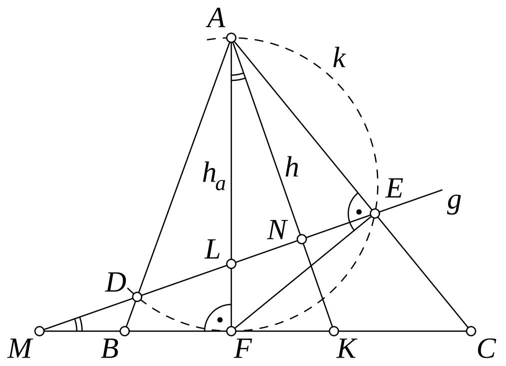
M.26 Ein Kreis hat die Höhe h_a im Dreieck ABC als Durchmesser und schneidet die Seiten AB und AC in den Punkten D bzw. E (beide verschieden von A). Beweise, daß der Umkreismittelpunkt von $\triangle ABC$ auf der Höhe durch A des Dreiecks ADE oder dessen Verlängerung liegt.
(*10^{th} Nordic Mathematical Contest, 1996*)

M.26 *Beweis:* (Bild) h sei diejenige Gerade, auf der A und der Umkreismittelpunkt von $\triangle ABC$ liegen; sie schneide BC in K und $g \equiv DE$ in N. Weiterhin sei F der Höhenfußpunkt von A im Dreieck ABC, $L \equiv g \cap AF$ sowie $M \equiv g \cap BC$. Somit ist $g \perp h$ zu zeigen.



Wir eröffnen die Winkel-Jagd mit der Feststellung, daß FE offenbar die Höhe im $\triangle AFC$ ist (Thales-Kreis k), woraus $\measuredangle EFC = 90° - \gamma$ folgt. Ferner gilt $\measuredangle DEF = \measuredangle DAF = 90° - \beta$. Im Dreieck MEF ist somit nach dem Außenwinkelsatz: $\measuredangle EMF = \measuredangle EFC - \measuredangle DEF = \beta - \gamma$. Diese Winkeldifferenz ruft sofort Aufgabe D.26 auf den Plan: $\measuredangle FAK$ beträgt ebenfalls $\beta - \gamma$. Damit wird $\measuredangle AKF = 90° - (\beta - \gamma) = \measuredangle MLF$, d. h., $FKNL$ ist ein Sehnenviereck. Also müssen sich auch die beiden anderen gegenüberliegenden Winkel zu einem Gestreckten ergänzen: $\measuredangle LNK = 90°$ oder $g \perp h$. $\square$