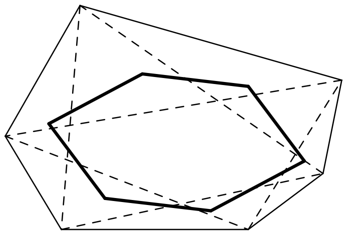
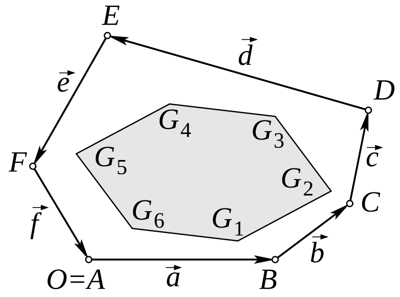
M.4 (Bild) In einem beliebigen, unregelmäßigen Sechseck werden die durch jeweils drei aufeinanderfolgende Eckpunkte gebildeten Dreiecke gezeichnet und deren Schwerpunkte untereinander verbunden. Man zeige, daß in dem neu entstandenen Sechseck die drei Paare jeweils gegenüberliegender Seiten gleich lang und parallel zueinander sind.



M.4 *Beweis:* (Bild) Bezeichnen wir die Seiten des unregelmäßigen Sechsecks $ABCDEF$ nacheinander mit den Vektoren $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{f}$ und behalten dabei den mathematisch positiven Umlaufsinn bei, so verschwindet (da der Polygonzug geschlossen ist) deren Vektorsumme:

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}+\boldsymbol{e}+\boldsymbol{f}=\boldsymbol{0}. \qquad \text{(M.101)}$$



Wird der Eckpunkt A als Ursprung O eines Koordinatensystems gewählt, so erhalten wir den Schwerpunkt G_1 des von den Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ aufgespannten Dreiecks ABC als arithmetisches Mittel der drei Ortsvektoren $\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$:

$$\overrightarrow{OG_1}=\frac{2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{3}.$$

Analog erhalten wir für die Schwerpunkte der anderen Dreiecke

$$\overrightarrow{OG_2}=\boldsymbol{a}+\frac{2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}}{3},\quad \overrightarrow{OG_3}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\frac{2\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}}{3},\quad \overrightarrow{OG_4}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\frac{2\boldsymbol{d}+\boldsymbol{e}}{3},$$
$$\overrightarrow{OG_5}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}+\frac{2\boldsymbol{e}+\boldsymbol{f}}{3},\quad \overrightarrow{OG_6}=\frac{\boldsymbol{a}-\boldsymbol{f}}{3}.$$

Daraus folgen durch Differenzbildung und unter Beachtung von (M.101) die Vektoren der Seiten des inneren Sechsecks:

$$\overrightarrow{G_1G_2}=\frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}}{3},\qquad \overrightarrow{G_2G_3}=\frac{\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}}{3},\qquad \overrightarrow{G_3G_4}=\frac{\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}+\boldsymbol{e}}{3},$$
$$\overrightarrow{G_4G_5}=\frac{\boldsymbol{d}+\boldsymbol{e}+\boldsymbol{f}}{3},\qquad \overrightarrow{G_5G_6}=\frac{\boldsymbol{e}+\boldsymbol{f}+\boldsymbol{a}}{3},\qquad \overrightarrow{G_6G_1}=\frac{\boldsymbol{f}+\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{3},$$

wobei die zu gegenüberliegenden Seiten gehörigen Ausdrücke jeweils untereinander stehen. Wegen (M.101) ist also $\overrightarrow{G_1G_2}+\overrightarrow{G_4G_5}=\overrightarrow{G_2G_3}+\overrightarrow{G_5G_6}=\overrightarrow{G_3G_4}+\overrightarrow{G_6G_1}=\boldsymbol{0}$. Dies sind genau die Bedingungen dafür, daß gegenüberliegende Seiten parallel sind und die gleiche Länge haben. □