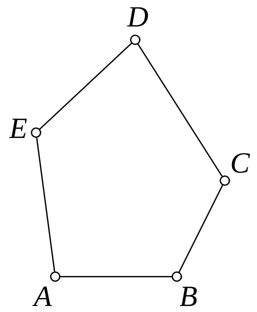
**M.42** (Bild) Im Innern eines Fünfecks $ABCDE$ sollen alle diejenigen Punkte $P$ gefunden werden, für die das Viereck $ABCP$ einen ebenso großen Flächeninhalt wie das Fünfeck $CDEAP$ hat. a) Man beschreibe eine von den gegebenen Eckpunkten des Fünfecks ausgehende Konstruktion, mit der sich eine Menge von Punkten $P$ ergibt. b) Beweisen Sie, daß jeder Punkt $P$, der sich aus dieser Konstruktion ergibt, die Bedingung der Flächengleichheit erfüllt.
(*36. Mathematik-Olympiade 1996/97, Klasse 10, Stufe 3*)



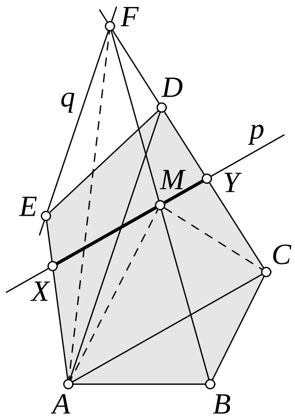
**M.42** (Bild) Die Aufgabe vereinfacht sich, wenn das Fünfeck $ABCDE$ in ein flächengleiches Viereck verwandelt wird. Das dabei entstehende Viereck kann dann in zwei Dreiecke zerlegt werden, die sich einfach in ihrem Flächeninhalt halbieren lassen.

a) Man gelangt damit zu folgender *Konstruktion:*

*1.* Es wird die Parallele $q$ zu $AD$ durch $E$ konstruiert und mit der Verlängerung von $CD$ im Punkt $F$ zum Schnitt gebracht.

*2.* Man konstruiert den Mittelpunkt $M$ der Strecke $BF$.

*3.* Es wird die Parallele $p$ zu $AC$ durch $M$ konstruiert. Sie schneidet die Fläche des Fünfecks $ABCDE$ in einer Strecke $XY$.




Als Ergebnis der Konstruktion erhält man auf dieser Strecke zwischen $X$ und $Y$ die Menge aller Punkte $P$.

b) *Beweis:* Nach *3.* ist $PM \parallel AC$, daher hat das Dreieck $ACP$ den gleichen Flächeninhalt wie $\triangle ACM$. Also sind die Vierecke $ABCP$ und $ABCM$ flächengleich. Die Fläche von $ABCM$ ist gleich der Summe der Flächeninhalte der Dreiecke $ABM$ und $BCM$. Nach *2.* haben diese Dreiecke jeweils einen halb so großen Flächeninhalt wie $\triangle ABF$ und $\triangle BCF$. Also ist das Viereck $ABCP$ halb so groß wie $ABCF$. Nach *1.*, also $EF \parallel AD$, hat das Dreieck $ADF$ den gleichen Flächeninhalt wie $\triangle ADE$ und folglich $ABCF$ den gleichen Flächeninhalt wie das Fünfeck $ABCDE$. Somit ist der Flächeninhalt von $ABCP$ halb so groß wie der von $ABCDE$ und daher so groß wie der von $CDEAP$. □