$\boxed{\text{M.5}}$ In einem Viereck stehen die Diagonalen genau dann senkrecht aufeinander, wenn

a) die Summe der Quadrate gegenüberliegender Seiten gleich ist,
Ladies diary, 1757 [Ley17, vol. 3]

b) die Mittellinien (das sind die Verbindungsstrecken der Mittelpunkte gegenüberliegender Seiten) gleich lang sind.

M.5 *Beweis:* Die Bedingung, daß die Diagonalen senkrecht aufeinander stehen, lautet in Vektorschreibweise

$$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{d})=\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{cd}-\boldsymbol{bc}-\boldsymbol{ad}=0. \tag{M.102}$$

a) Für die andere Bedingung finden wir entsprechend

$$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2+(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{d})^2=(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})^2+(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{d})^2,$$

die ausmultipliziert auf

$$a^2+b^2+c^2+d^2-2\,(\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{cd})=b^2+c^2+a^2+d^2-2\,(\boldsymbol{bc}+\boldsymbol{ad}) \quad \text{oder}$$
$$\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{cd}=\boldsymbol{bc}+\boldsymbol{ad}$$

führt. Dies ist identisch mit (M.102); beide Gleichungen lassen sich also durch äquivalente Umformungen ineinander überführen. b) Ähnlich wie unter a) läßt sich hier die Gleichung

$$\left|\frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{2}-\frac{\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}}{2}\right|=\left|\frac{\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}}{2}-\frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{d}}{2}\right| \quad \text{bzw.} \quad |\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}-\boldsymbol{d}|=|\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{d}|$$

aufstellen. Wenn die Längen gleich sein sollen, müssen auch deren Quadrate gleich sein:

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}-\boldsymbol{d})^2=(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{d})^2.$$

Weiteres Ausmultiplizieren und Vereinfachen führt ebenfalls auf (M.102). □