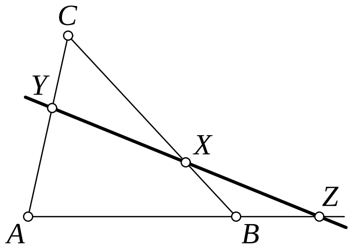
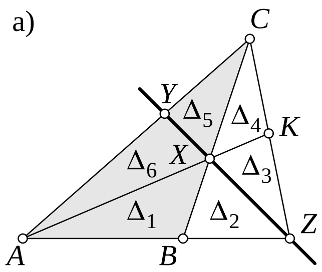
M.55 **Satz von Menelaus.** (Bild) Eine Transversale schneidet die Seiten eines Dreiecks so, daß das Produkt der Teilverhältnisse, das ihre Schnittpunkte mit den drei Seiten bilden, den Wert -1 hat:

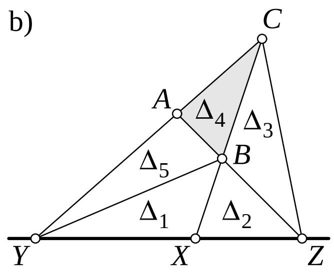
$$\frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} = -1.$$



M.55 *Beweis:* In beiden Fällen, in denen die Gerade durch X, Y, Z die Dreieckseiten entweder zweimal (Bild a) oder gar nicht (Bild b) direkt (d. h. innerlich) teilt, können wir die Figur zu einem größeren unterteilten Dreieck erweitern. Wir erhalten im Fall a) – analog zum Beweis des Satzes von CEVA – wieder sechs Teilflächen Δ_i ($i = 1, 2, \ldots, 6$). Die Sätze der gemeinsamen Seite bzw. Höhen liefern uns nun folgende drei Gleichungen:

$$\frac{AZ}{ZB} = -\frac{\Delta_1 + \Delta_2}{\Delta_2}, \quad \frac{BX}{XC} = \frac{\Delta_2}{\Delta_3 + \Delta_4}, \quad \frac{CY}{YA} = \frac{\Delta_5}{\Delta_6} = \frac{\Delta_3 + \Delta_4 + \Delta_5}{\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_6} = \frac{\Delta_3 + \Delta_4}{\Delta_1 + \Delta_2},$$





die miteinander multipliziert -1 ergeben. Im Fall b) kommen wir mit nur fünf Teilflächen Δ_i ($i = 1, 2, \ldots, 5$) aus, wobei zur Abkürzung wiederum $\Delta = \sum \Delta_i$ gesetzt wird:

$$\frac{AZ}{ZB} = -\frac{\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_5}{\Delta_1 + \Delta_2}, \qquad \frac{BX}{XC} = -\frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_4 + \Delta_5} = -\frac{\Delta_2}{\Delta_2 + \Delta_3} = -\frac{\Delta_1 + \Delta_2}{\Delta},$$

$$\frac{CY}{YA} = -\frac{\Delta}{\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_5},$$

so daß nach Multiplikation ebenso

$$\frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} = -1$$

folgt. □