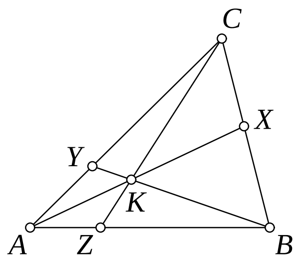
M.56 **Satz von Euler-Gergonne.** (Bild) Für die Teilungsverhältnisse $u \equiv AK/KX$, $v \equiv BK/KY$, $w \equiv CK/KZ$ dreier sich in $K$ schneidender Ecktransversalen eines Dreiecks $ABC$ gilt:

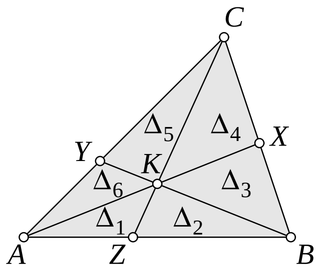
$$\frac{1}{1+u} + \frac{1}{1+v} + \frac{1}{1+w} = 1. \tag{M.9}$$



M.56 *Beweis:* (Bild) Die zu beweisende Gleichung diktiert uns, wie wir vorzugehen haben: Für die Teilungsverhältnisse $u$, $v$, $w$ lesen wir folgende Flächenverhältnisse ab:

$$u = \frac{AK}{KX} = \frac{\varDelta_1 + \varDelta_2}{\varDelta_3} = \frac{\varDelta_5 + \varDelta_6}{\varDelta_4}, \qquad v = \frac{BK}{KY} = \frac{\varDelta_3 + \varDelta_4}{\varDelta_5} = \frac{\varDelta_1 + \varDelta_2}{\varDelta_6},$$

$$w = \frac{CK}{KZ} = \frac{\varDelta_5 + \varDelta_6}{\varDelta_1} = \frac{\varDelta_3 + \varDelta_4}{\varDelta_2}.$$




Somit folgt mit $\varDelta = \sum_i \varDelta_i$

$$\frac{1}{1+u} = \frac{\varDelta_3}{\varDelta_1 + \varDelta_2 + \varDelta_3} = \frac{\varDelta_4}{\varDelta_4 + \varDelta_5 + \varDelta_6} = \frac{\varDelta_3 + \varDelta_4}{\varDelta},$$

$$\frac{1}{1+v} = \frac{\varDelta_5}{\varDelta_3 + \varDelta_4 + \varDelta_5} = \frac{\varDelta_6}{\varDelta_6 + \varDelta_1 + \varDelta_2} = \frac{\varDelta_5 + \varDelta_6}{\varDelta},$$

$$\frac{1}{1+w} = \frac{\varDelta_1}{\varDelta_1 + \varDelta_5 + \varDelta_6} = \frac{\varDelta_2}{\varDelta_2 + \varDelta_3 + \varDelta_4} = \frac{\varDelta_1 + \varDelta_2}{\varDelta}.$$

Die Summe der rechts stehenden Terme ist – wie behauptet – eins. □

*Bemerkung:* Die angegebene Gleichung läßt sich auch so schreiben: $uvw = u + v + w + 2$.